Bài giảng số 11

CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ TỔ HỢP CHỈNH HỢP VÀ PHÉP ĐẾM

Bài giảng này đề cập đến các loại toán sau đây của chủ đề này:
- Giải phương trình liên quan đến số tổ hợp, chỉnh hợp.
- Chứng minh các hệ thức tổ hợp (không sử dụng công thức khai triển của nhị thức Newton).
- Các bài toán về phép đếm.

§1. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC TỔ HỢP

Phương pháp giải này dựa trực tiếp vào các công thức tính các số tổ hợp C_n^k, số chỉnh hợp A_n^k và số hoán vị P_n. Hai công thức rất hay sử dụng trong mục này là:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ và } C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Xét các thí dụ minh họa sau đây:

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)

Cho n nguyên dương và k nguyên ($0 \le k \le n$).

Chứng minh hệ thức sau:

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^k}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^k}{C_{n+1}^kC_{n+1}^{k+1}}$$

$$=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{C_{n+2}^{k+1}}{C_{n+1}^kC_{n+1}^{k+1}}=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n+1-k)!}\cdot\frac{k!(n+1-k)!(n-k)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)(n+1)!(n+2)k!(n-k)!}{(n+2)(n+1)!n!(n+1)}=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_n^k} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đai học Hùng Vương – 2006)

Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta có:

$$\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+\frac{1}{A_4^2}+\dots+\frac{1}{A_n^2}=\frac{n-1}{n}.$$

Giải

Ta có

$$\frac{1}{A_2^2}+\frac{1}{A_3^2}+\frac{1}{A_4^2}+...+\frac{1}{A_n^2}=\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}+\frac{2!}{4!}+...+\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thí dụ 3:

Cho k, n là các số nguyên và $4 \le k \le n$. Chứng minh:

$$C_n^k+4C_n^{k-1}+C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k.$$

Giải

Áp dụng tính chất của số tổ hợp, ta có:

$$C_{n+4}^k=C_{n+3}^k+C_{n+3}^{k-1}$$

$$=\left(C_{n+2}^k+C_{n+2}^{k-1}\right)+\left(C_{n+2}^{k-1}+C_{n+2}^{k-1}\right)$$

$$=\left(C_{n+1}^k+C_{n+1}^{k-1}\right)+2\left(C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}\right)+\left(C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}\right)$$

$$=\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)+3\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)+3\left(C_n^{k-2}+C_n^{k-3}\right)+\left(C_n^{k-3}+C_n^{k-4}\right)$$

$$=C_n^k+4C_n^{k-1}+6C_n^{k-2}+4C_n^{k-3}+C_n^{k-4} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thí dụ 4:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \ge 1$, ta có:

$$C_n^1+2\frac{C_n^2}{C_n^1}+3\frac{C_n^3}{C_n^2}+...+n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}=C_{n+1}^2.$$

Giải

Với k = 1, 2,…, n ta có:

$$k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}=k\frac{n!(n+1-k)!(k-1)!}{(n-k)!k!n!}=\frac{(k-1)!k(n-k)!(n+1-k)}{(n-k)!k!}.$$

$$=n-k+1.$$

Từ đó suy ra:

$$C_n^1+2\frac{C_n^2}{C_n^1}+3\frac{C_n^3}{C_n^2}+...+n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}=n+(n-1)+(n-2)+...+1$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Thí dụ 5:

Cho $n \ge 2$ là số nguyên, chứng minh rằng:

$$P_n=1+P_1+2P_2+3P_3+...+(n-1)P_{n-1},$$

ở đây P_k là số hoán vị của k phần tử, k = 1, 2,…,n.

Giải

Ta có: $P_k - P_{k+1} = k! - (k-1)! = (k-1)!k - (k-1)! = (k-1)(k-1)! = (k-1)P_{k-1}$ (1)

Áp dụng liên tiếp (1) ta có: $\begin{cases} P_2 - P_1 = P_1 \\ P_3 - P_2 = 2P_2 \\ P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1} \end{cases}$

Cộng từng vế các đẳng thức trên, ta có:

$$P_n - P_1 = P_1 + 2P_2 + ... + (n-1)P_{n-1}.$$

Do $P_1 = 1 \Rightarrow P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + ... + (n-1)P_{n-1} \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh hệ thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học. Xin dành cách giải đó cho bạn đọc.

§2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN SỐ TỔ HỢP, SỐ CHỈNH HỢP

Với các phương trình, bất phương trình thuộc loại này, cách giải tiến hành như sau:

- Đặt điều kiện để phương trình, bất phương trình có nghĩa. Xin lưu ý để A_n^k, C_n^k có nghĩa ta cần có: $n > 0$, $n \geq k \geq 0$, n, k là các số nguyên.
- Sử dụng các công thức về số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị đưa phương trình đã cho về các phương trình đại số.
- Nghiệm tìm được phải đối chiếu với các điều kiện đặt ra ban đầu (đặc biệt chú ý đến tính nguyên của nghiệm), để loại bỏ đi các nghiệm ngoại lai.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đai học khối D – 2005)

Biết rằng số n nguyên dương thỏa mãn hệ thức

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149.$$

Tính giá trị của biểu thức: $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$.

Giải

Xét phương trình sau (ẩn n)

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149 \quad (1)$$

Khi $n+1 \geq 2 \Rightarrow n + 2 > 2$; $n + 3 > 2$; $n + 4 > 2$. Vậy điều kiện để (1) có nghĩa là $n \geq 1$, với n nguyên.

Áp dụng công thức tính số tổ hợp, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + 2\frac{(n+2)!}{n!2!} + 2\frac{(n+3)!}{(n+1)!2!} + \frac{(n+4)!}{(n+2)!2!} = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)(n+2)+(n+2)(n+3)+\frac{(n+3)(n+4)}{2}=149$$

$$\Leftrightarrow n^2+4n-45=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-9 \end{array}\right. \quad (n=-9 \text{ loại do } n\geq 1)$$

$$\Leftrightarrow n=5.$$

Khi n = 5, dễ dàng thấy $M=\frac{A_6^4+3A_5^3}{6!}=\frac{3}{4}$.

Nhận xét:

Thực chất bài thi trên là đòi hỏi giải một phương trình liên quan đến số tổ hợp. Phần tính giá trị của M là quá đơn giản.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con gồm 2 phần tử của A.

1/ Tìm n.

2/ Tìm $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho số tập hợp con gồm k phần tử của tập hợp A là lớn nhất.

<u>Giải</u>

1/ Số tập hợp con có 4 phần tử của A là C_n^4 còn số tập hợp con có 2 phần tử của A là C_n^2. Theo bài ra ta có phương trình:

$$C_n^4=20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!4!}=20\frac{n!}{(n-2)!2!} \Leftrightarrow n^2-5n-234=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=18 \\ n=-13 \end{array}\right. \quad (n=-13 \text{ loại do } n \geq 4.$$

Vậy tập hợp A có 18 phần tử.

2/ Số tập hợp con có k phần tử của tập hợp A có 18 phần tử là C_{18}^k

Xét bất phương trình:

$$C_{18}^k<C_{18}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{18!}{(18-k)!k!}<\frac{18!}{(17-k)!(k+1)!}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{18-k}<\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k+1<18-k \Leftrightarrow k<\frac{17}{2} \Leftrightarrow k=1,2,\ldots,8.$$

Từ đó suy ra: $C_{18}^k>C_{18}^{k+1} \Leftrightarrow k>\frac{17}{2} \Leftrightarrow k=9,10,\ldots,17.$

Do đó $C_{18}^1<C_{18}^2<\ldots<C_{18}^8<C_{18}^9>C_{18}^{10}>C_{18}^{11}>\ldots>C_{18}^{18}$.

Vậy số tập hợp con gồm 9 phần tử của A là số tập con lớn nhất.

Nhận xét:

Đây là một thí dụ mẫu mực của việc áp dụng giải phương trình, giải bất phương trình với một bài toán có nội dung liên quan đến số tổ hợp.

Thí dụ 3: (Đề thi Đại học khối B – 2002)

Cho đa giác đều $A_1A_2,\ldots,A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có 3 đỉnh trong 2n điểm $A_1, A_2,\ldots, A_{2n}$ gấp 20 lần số hình chữ nhật có 4 đỉnh trong 2n điểm $A_1, A_2,\ldots, A_{2n}$. Tìm n.

Giải

Dễ thấy số tam giác là C_{2n}^3.

Một đa giác đều 2n đỉnh thì có n đường chéo xuyên tâm (đường chéo đi qua tâm của đa giác đều, cũng là tâm của đường tròn tâm (O)). Cứ hai đường chéo xuyên tâm có 1 hình chữ nhật có 4 đỉnh trong 2n điểm $A_1, A_2,\ldots, A_{2n}$. Vậy số hình chữ nhật là C_n^2. Theo bài ra ta có phương trình:

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(2n-3)!3!} = 20\frac{n!}{(n-2)!2!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n-2)(2n-1)2n}{6} = 20\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n-2)(2n-1)}{3} = 10(n-1) \text{ (do } n \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow n = 8.$$

Nhận xét:

Trong 3 thí dụ, mặc dù ở dạng ban đầu trong đầu bài không nói gì đến việc giải phương trình hoặc bất phương trình liên quan đến số tổ hợp, số chỉnh hợp... nhưng thực chất của bài toán lại chính là điều ấy.

Dưới đây ta sẽ xét các thí dụ mà trong đó ngay từ đầu đã yêu cầu giải phương trình (hoặc bất phương trình) liên quan đến số tổ hợp, chỉnh hợp.

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm TP Hồ Chí Minh – 2005)

Tìm tất cả các số tự nhiên x, y sao cho: $A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : C_{x-1}^y = 21 : 60 : 10$.(1)

Giải

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\begin{cases} y \geq 1 \\ x - y \geq 1 \\ y - 1 \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq y + 1 \text{ (2)} \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{A_{x-1}^y}{C_{x-1}^y} = \dfrac{60}{10} \Leftrightarrow \dfrac{y!C_{x-1}^y}{C_{x-1}^y} = 6 \Leftrightarrow y! = 3! \Leftrightarrow y = 3$

Thay lại vào (1) ta có: $\dfrac{A_x^{y-1}}{A_{x-1}^y} = \dfrac{21}{60} \Leftrightarrow \dfrac{A_x^2}{A_{x-1}^3} = \dfrac{7}{20} \Leftrightarrow \dfrac{x!(x-4)!}{(x-2)!(x-1)!} = \dfrac{7}{20}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow 7x^2 - 55x + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=\dfrac{6}{7} \end{array}\right. \left(x=\frac{6}{7} \text{ loại do } x\ge 4,\ x\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy x = 7, y = 3 là cặp số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài:

Nhận xét:

Tương tự bài trên, trong đề thi tuyển sinh vào "*Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội -2004*" có dạng:

Giải hệ: $\begin{cases} 2A_y^x + 5C_y^x = 90 \\ 5A_y^x - 2C_y^x = 80 \end{cases}$

Ta có ngay $A_y^x = 20,\ C_y^x = 10 \Rightarrow x = 2; y = 5.$

Thí dụ 5:

Giải bất phương trình: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}C_x^3 + 10.$

Giải

Xét bất phương trình: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}C_x^3 + 10.$ (1)

Điều kiện để (1) có nghiệm là $x \ge 3,\ x\in\mathbb{Z}$ (2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}\frac{x!}{(x-3)!3!} + 10$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)2x}{2} - x(x-1) \le (x-2)(x-1) + 10 \Leftrightarrow 3x - 12 \le 0 \quad \Leftrightarrow x \le 4 \qquad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra: x = 3; x = 4.

Thí dụ 6:

Cho tập hợp A gồm n phần tử, n>4. Tìm n biết rằng trong số các tập con của A có đúng 16n tập con có số phần tử là lẻ.

Giải

$C_n^1, C_n^3, C_n^5, \ldots,$ lần lượt là số các tập hợp con của A có 1, 3, 5… phần tử.

Ta có: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$. (1)

(1) chứng minh như sau:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n,$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \ldots + (-1)^n C_n^nx^n.$$

Từ đó suy ra: $(1+x)^n - (1-x)^n = 2\left(C_n^1x + C_n^3x^3 + \ldots\right)$ (2)

Trong (2) cho x = 1, ta có: $2^n = 2\left(C_n^1 + C_n^3 + \ldots\right) \Rightarrow$ (1) đúng.

Theo bài ra ta có phương trình:

$$2^{n-1} = 16n \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \ (3)$$

Rõ ràng n = 5 không thỏa mãn (3). vậy ta xét (3) với $n \ge 6$.

Xét hàm số $f(x) = 2^{x-5} - x$ với $x \geq 6$

$$f'(x) = 2^{x-5}\ln 2 - 1 \geq 2\ln 2 - 1 > 0 \text{ với } x \geq 6$$

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x \geq 6$, lại có $f(8) = 0$, vậy suy ra (3) có nghiệm duy nhất n = 8. Do đó n = 8 là nghiệm duy nhất của bài toán.

Nhận xét chung:

Trong bài toán trên ta đã sử dụng tổng hợp các kiến thức sau:

- Nhị thức Newton.
- Ứng dụng tính đồng biến của hàm số để nhằm mục đích giải phương trình:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 16n .$$

Ta có thể nói rằng giải phương trình và bất phương trình tổ hợp còn có mặt trong nhiều đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng khác. (Trong các đề thì việc giải các phương trình này là bước thứ nhất của lời giải. Sau khi tìm được n ta mới giải được tiếp bài toán).

§3. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM

Hai quy tắc chính để giải các bài toán về phép đếm là: Quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Hai phương pháp chính để giải các bài toán về phép đếm là:

- Phương pháp trực tiếp.
- Phương pháp gián tiếp.

Hai loại bài toán về phép đếm là:

- Phép đếm không lặp.
- Phép đếm có lặp.

A. PHÉP ĐẾM KHÔNG LẶP

Trong phép đếm không lặp, mỗi yếu tố cấu thành nên phần tử cần đếm chỉ xuất hiện tối đa một lần, không có sự lặp lại.

Đây là bài toán chủ đạo của phép đếm. Trong số các bài toán về phép đếm có mặt trong các đề thi tuyển sinh từ 2002-2009, các bài toán về phép đếm không lặp chiếm tỉ lệ 95% (là 100% đối với các đề thi tuyển sinh vào Đại học các khối A, B, D trong những năm ấy).

Như đã nói ở trên, để giải các bài toán về phép đếm không lặp, ta có hai phương pháp chính để giải:

a. Phương pháp trực tiếp

Phép đếm trực tiếp là phương pháp đi thẳng vào các yêu cầu bài toán đặt ra, nói một cách nôm na "hỏi gì, đếm nấy" là nội dung của phương pháp này.

Để sử dụng được phương pháp trực tiếp ta chủ yếu dùng quy tắc cộng và quy tắc nhân. Nên lưu ý rằng nói chung trong mỗi bài toán về phép đếm hai quy tắc này thường sử dụng đồng thời và đan xen lẫn nhau:

b. Phương pháp gián tiếp:

Phương pháp này dựa trên nguyên lí "đếm những cái không cần đếm, để biết những cái cần đếm". Nói theo ngôn ngữ của lí thuyết tập hợp, thì phương pháp gián tiếp thực chất là "phép lấy phần bù".

Dĩ nhiên quy tắc cộng và quy tắc nhân vẫn sẽ là công cụ chính dùng trong phương pháp gián tiếp này.

Các dạng toán cơ bản

Loại 1: Sử dụng phương pháp trực tiếp giải các bài toán phép đếm không lặp

Thí dụ 1: (Đề thi Đại học khối B – 2004)

Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Giải

Gọi A là tập hợp các cách chọn đề có 3 câu hỏi dễ, 1 câu hỏi khó, 1 câu hỏi trung bình.

Gọi B là tập hợp các cách chọn đề có 2 câu hỏi dễ, 2 câu hỏi khó, 1 câu trung bình.

Gọi C là tập hợp các cách chọn đề có 2 câu hỏi dễ, 1 câu hỏi khó, 2 câu trung bình. Gọi Ω là tập hợp cách chọn đề theo yêu cầu đề bài.

Ta có $\Omega = A \cup B \cup C$.

Do A, B, C đôi một không giao nhau, nên theo quy tắc cộng, ta có:

$$|\Omega|=|A|+|B|+|C|. \ (1)$$

Sử dụng quy tắc nhân, ta có:

$$|A| = C_{15}^3.C_5^1.C_{10}^1 = 22750 \ ; |B|=C_{15}^2.C_5^2.C_{10}^1 = 10500 \ ;$$

$$|C| = C_{15}^2.C_5^1.C_{10}^2 = 23625 \ .$$

Thay vào (1) ta có: $|\Omega| = 56875$.

Vậy có 56875 cách chọn đề kiểm tra thỏa mãn yêu cầu.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Giải

Đầu tiên, chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất. Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$n_1 = C_{12}^4.C_3^1 = 1485 \ .$$

Sau đó chọn 4 nam (trong 8 nam còn lại) và 1 nữ (trong 2 nữ còn lại) cho tỉnh thứ hai. Lại theo quy tắc nhân, số cách chọn là:

$$n_2 = C_8^4 C_2^1 = 140 \ .$$

(Dĩ nhiên còn lại ta chọn xong tỉnh thứ 3)

Vậy theo quy tắc nhân, số cách phân công theo yêu cầu là:

$$n = n_1.n_2 = 1485.140 = 207900 \ .$$

Nhận xét:

Bài thi được giải thuần túy chỉ bằng quy tắc nhân.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Cơ khí luyện kim – 2005)

Có 5 Nhà Toán học nam, 3 Nhà Toán học nữ, 4 Nhà Vật lí nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cả nhà toán học và nhà vật lí học. Hỏi có bao nhiêu cách lập đoàn công tác?

Giải

Chỉ có 3 cách lập đoàn công tác như sau:

- Gồm 2 Nhà Vật lí nam, 1 Nhà Toán học nữ. Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$C_4^2C_3^1 = 6.3 = 18.$$

- Gồm 1 Nhà Vật lí nam, 2 Nhà Toán học nữ. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là:

$$C_4^1C_3^2 = 4.3 = 12.$$

- Gồm 1 Nhà Vật lí nam, 2 Nhà Toán học nữ, 1 Nhà Toán học nam. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là: $C_4^1C_3^1C_5^1 = 4.3.5 = 60$.

Theo quy tắc cộng, số cách lập đoàn công tác là: 18 + 12 + 60 = 90.

Vậy có 90 cách lập đoàn công tác .

Thí dụ 4:

Có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.

Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu, vừa khác số.

Giải

Sử dụng quy tắc nhân để giải bài toán trên:

- Bước 1: Chọn cầu vàng $n_1 = 4$.
- Bước 2: Chọn cầu đỏ: Lúc này phải loại đi quả cầu đỏ đã có số trùng với quả cầu vàng đã chọn ở bước 1, vì thế số cách chọn quả cầu đỏ là $n_2 = 4$.
- Bước 3: Chọn cầu xanh: Lần này phải loại đi 2 quả cầu xanh có số trùng với số của quả cầu đỏ đã chọn ở bước 2 và quả cầu vàng đã chọn ở bước 1. Vì thế số cách chọn quả cầu xanh là $n_3 = 4$.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn 3 quả cầu sẽ là $n = n_1.n_2.n_3 = 64$.

Thí dụ 5:

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

Giải

Ta "dán" hai chữ số 2 và 3 liền nhau thành "chữ số kép". Có hai cách dán (23 hoặc 32). Bài toán trở thành: có 5 chữ số là 0,1,4,5 và số kép. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số có 5 chữ số khác nhau?

Ta giải bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1: Dán số 2 và 3 với nhau, có $n_1 = 2$ cách.

Bước 2: Số hàng vạn, có $n_2 = 4$ cách (trừ số 0)

Bước 3: Số hàng nghìn có, $n_3 = 4$ cách chọn

Bước 4: số hàng trăm, có $n_4 = 3$ cách chọn

Bước 5: số hàng chục, có $n_5 = 2$ cách chọn

Bước 6: Số hàng đơn vị, có $n_6 = 1$ cách chọn.

Vậy số các số cần chọn theo quy tắc nhân là:

$$n = n_1.n_2.n_3.n_4.n_5.n_6 = 2.4.4.3.2.1 = 192.$$

Thí dụ 6:

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng của các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

Giải

Gọi A là tập hợp các số cần tìm. Mỗi phần tử của A có dạng:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6},$$

trong đó a_i, a_j đôi một khác nhau (được chọn trong tập hợp 9 số đã cho), ngoài ra $a_3 + a_4 + a_5 = 8$.

Ta có: $1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 8$, vậy có hai cách chọn nhóm 3 số để các số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn có tổng bằng 8. Từ đó ta sử dụng quy tắc nhân để giải bài toán như sau:

Bước 1: Chọn ra 3 trong 8 số đã có $a_3 + a_4 + a_5 = 8$. Theo trên số cách chọn $n_1 = 2$.

Bước 2: Với ba số chọn ở bước 1, có:

$$n_2 = 3! = 6 \text{ cách lập số } \overline{a_3a_4a_5}.$$

Bước 3: Chọn ra số $\overline{a_1a_2a_6}$ theo thứ tự trên. Đây là cách chọn 3 trong 6 số, có thứ tự sắp xếp. Số cách chọn $n_3 = A_6^3 = 120$.

Theo quy tắc nhân, số cách chọn theo yêu cầu là $n = n_1n_2n_3 = 2.6.120 = 1440$.

Thí dụ 7:

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau mà mỗi số lập được đều nhỏ hơn 2500?

Giải

Xét hai khả năng:

1/ Xét tập hợp A_1 có các số có dạng $\overline{1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_5 \in \{0; 2; 4; 6\}$.

Để tìm $|A_1|$ ta sẽ sử dụng quy tắc nhân như sau:

- Chọn a_5: số cách chọn $n_1 = 4$.
- Chọn $\overline{a_2a_3a_4}$. Đó là chọn 3 trong 5 số (kể cả thứ tự). Số cách chọn là:

$$n_2 = A_5^3 = 60.$$

Theo quy tắc nhân: $|A_1| = n_1n_2 = 4.60 = 240$ cách.

2/ Xét tập hợp A_2 các số có dạng $\overline{2a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_5 \in \{0;4;6\}$ và $a_2 \leq 4$.

Có 3 trường hợp sau:

(1) Tập hợp A_{20} là tập hợp các số có dạng $\overline{2a_2a_3a_40}$.

Vì $a_2 \leq 4$, nên có $n_1 = 3$ cách chọn a_2. Để chọn $\overline{a_3a_4}$ có $n_2 = A_4^2 = 12$ cách chọn. Theo quy tắc nhân: $|A_{20}| = 3.12 = 36$ cách.

(2) Tập hợp A_{24} là tập hợp các số có dạng $\overline{2a_2a_3a_44}$.

Tương tự như trường hợp (1), ta có: $|A_{24}| = 36$ cách.

(3) Tập hợp A_{26} là tập hợp các số có dạng: $\overline{2a_2a_3a_46}$.

Vì $a_2 \leq 4$ bây giờ có thể chọn $a_2 \in \{0; 1; 4; 5\}$, nên có $n_1 = 4$ cách chọn a_2.

Vậy $|A_{26}| = 2.12=48$.

Theo quy tắc cộng, ta có: $|A_2| = |A_{20}| + |A_{24}| + |A_{26}| = 36 + 36 + 48 = 120$ cách.

Gọi A là tập hợp cần tìm. Theo quy tắc cộng, ta có

$$|A| = |A_1| + |A_2| = 240 + 120 = 360.$$

Vậy có 360 số cần tìm.

Loại 2: Sử dụng phương pháp gián tiếp giải các bài toán về phép đếm không lặp:

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp T, 4 học sinh lớp L và 3 học sinh lớp H. Cần chọn 4 học sinh tham gia trực tuần, sao cho 4 học sinh đó thuộc không quá 2 trong 3 lớp nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Gọi A là tập hợp mọi cách chọn 4 học sinh trong 12 học sinh.

Gọi B là tập hợp các cách chọn không thỏa mãn yêu cầu đầu bài (tức là chọn đủ học sinh 3 lớp).

Gọi C là tập hợp cách chọn thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Ta có $A = B \cup C$; $B \cap C = \varnothing$.

Theo quy tắc cộng, ta có: $|A| = |B| + |C| \Rightarrow |C| = |A| - |B|$. (1)

Ta có ngay $|A| = C_{12}^4 = 495$. (2)

Để tính $|B|$, ta nhận thấy sẽ chọn 1 lớp có 2 học sinh và 2 lớp còn lại mỗi lớp 1 học sinh. Theo quy tắc cộng và nhân ta có:

$$|B| = C_5^2C_4^1C_3^1 + C_5^1C_4^2C_3^1 + C_5^1C_4^1C_3^2 = 120 + 90 + 60 = 270 \text{ . (3)}$$

Thay (2) (3) vào (1) và có: $|C| = 495 - 270 = 225$.

Vậy có 225 cách chọn.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Hà Nội – 2005)

Trong một tổ học sinh của lớp 12A có 8 nam và 4 nữ. Thầy giáo muốn chọn 3 học sinh để làm trực nhật lớp học, trong đó phải có ít nhất 1 học sinh nam. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Gọi A là tập hợp số cách chọn tùy ý 3 học sinh trong 12 học sinh.

Gọi B là tập hợp số cách chọn cả 3 nữ sinh.

Gọi C là tập hợp số cách chọn theo yêu cầu đề ra.

Ta có (lập luận như thí dụ 1)

$$|C| = |A| - |B|. \text{ (1)}$$

Dễ thấy: $|A| = C_{12}^3 = 220$,

$|B| = C_4^3 = 4$.

Từ đó theo (1) ta có: $|C| = 220 - 4 = 216$.

Vậy có 216 cách chọn.

Nhận xét:

Hoàn toàn tương tự trong đề thi tuyển sinh "*Cao đẳng khối A – 2004*" có bài toán:

Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Có bao nhiêu cách chọn 3 em trong lớp để trực tuần sao cho trong 3 em đó luôn có cán bộ lớp?

Giải bằng phương pháp gián tiếp số cách đó là:

$$C_{30}^3 - C_{27}^3 = 4060 - 2925 = 1135.$$

Thí dụ 3:

Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên từ trong hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ cả 3 màu?

Giải

Gọi A là tập hợp các cách chọn 4 viên bi tùy ý trong 15 viên.

Gọi B là tập hợp các cách chọn 4 viên bi đủ cả 3 màu.

Gọi C là tập hợp các cách chọn 4 viên bi theo yêu cầu đầu bài.

Ta có: $|C| = |A| - |B|$. (1)

Dễ thấy $|A| = C_{15}^4 = 1365$. (2)

Gọi B_1 là tập hợp các cách chọn 2 viên bi đỏ, 1 trắng, 1 xanh.

B_2 là tập hợp các cách chọn 1 bi đỏ, 2 trắng, 1 xanh.

B_3 là tập hợp các cách chọn 1 bi đỏ, 1 trắng, 2 xanh.

Theo quy tắc cộng và nhân, ta có:

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = C_4^2C_5^1C_6^1 + C_4^1C_5^2C_6^1 + C_4^1C_5^1C_6^2 = 720. \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) và có:

$$|C| = 1365 - 720 = 645.$$

Vậy có 645 cách chọn 4 viên bi theo yêu cầu đề bài.

Thí dụ 4:

Ở một trường tiểu học có 50 em là học sinh giỏi, trong đó có 4 cặp em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 em để đi dự trại hè. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong nhóm 3 em được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào?

Giải

Gọi A là tập hợp các cách chọn tùy ý 3 em trong số 50 em.

Gọi B là tập hợp các cách chọn 3 em, trong đó có 1 cặp sinh đôi.

Gọi C là tập hợp các cách chọn 3 em theo yêu cầu đề bài.

Ta có: $|C| = |A| - |B|$. (1)

Ta có $|A| = C_{50}^2 = 19600$.

Tìm $|B|$ theo quy tắc nhân như sau:

- Chọn cặp sinh đôi: có $n_1 = 4$ cách chọn.
- Chọn 1 em còn lại trong 48 em, có $n_2 = 48$ cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có:

$$|B| = n_1n_2 = 4.\ 48 = 192.$$

Vậy từ (1) suy ra: $|C| = 19600 - 192 = 19408$.

Vậy số cách chọn là 19408.

Thí dụ 5:

Cho hình thập giác lồi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác lồi, nhưng cạnh của tam giác không phải là cạnh của thập giác lồi?

Giải

Gọi A là tập hợp tất cả các tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của thập giác.

Gọi B là tập hợp tất cả các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của thập giác nhưng có ít nhất 1 cạnh cũng là cạnh của thập giác.

Gọi C là tập hợp cần tìm ta có:

$$|C| = |A| - |B|. \qquad (1)$$

Dễ thấy $|A| = C_{10}^3 = 120$. (2)

Gọi B_1 là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của thập giác và có đúng 1 cạnh là cạnh của thập giác; B_2 là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh của thập giác và có 2 cạnh là cạnh của thập giác. Khi đó theo quy tắc cộng, ta có:

$$|B| = |B_1| + |B_2|. \quad (3)$$

Để tính $|B_1|$ ta sẽ sử dụng quy tắc nhân như sau:

- Bước 1: Chọn 1 cạnh của thập giác làm cạnh của tam giác. Số cách chọn $n_1 = 10$.

- Bước 2: Khi đó đỉnh thứ ba cần chọn của tam giác được chọn trong 6 đỉnh còn lại (trừ 2 đỉnh của cạnh được chọn và 2 đỉnh khác của thập giác kề với hai đỉnh ấy). Số cách chọn là: $n_2 = 6$. Vì thế

$$|B_1| = n_1n_2 = 10.6 = 60.$$

Dễ thấy $|B_2| = 10$.

Từ đó theo (3), ta có: $|B| = 70$. (4)

Từ (2) (3) (4) suy ra:

$$|C| = 120 - 70 = 50.$$

Vậy có 50 tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Thí dụ 6:

Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn sách Văn học, 4 cuốn âm nhạc, và 3 cuốn hội hoa (các cuốn đôi một khác nhau). Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh, mỗi học sinh một cuốn sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi một trong 3 thể loại văn học, âm nhạc, hội họa đều còn lại ít nhất 1 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?

Giải

Gọi A là tập hợp tất cả các cách tặng sách cho học sinh.

Gọi B là tập hợp tất cả các cách tặng sao cho sau khi tặng sách không còn đủ ba thể loại; và C là tập hợp tất cả các cách tặng theo yêu cầu. Ta có:

$$|C| = |A| - |B|. \quad (1)$$

Dễ thấy $|A| = C_{12}^6.6! = 665280$ (2)

(C_{12}^6 là cách chọn 6 quyển trong 12 quyển. Sau khi có 6 quyển thì có 6! cách tặng 6 quyển sách cho 6 học sinh).

Vì $5 + 4 > 6$, $5 + 3 > 6$, $4 + 3 > 6$, nên không xảy ra trường hợp sau khi tặng sách xong chỉ còn lại 1 thể loại sách.

Vì thế $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, trong đó

B_1, B_2, B_3 tương ứng là tập hợp tất cả các cách tặng sách mà sau khi tặng sách xong, thầy giáo hết sách văn học, hết sách âm nhạc, hết sách hội họa.

Ta có ngay: $|B_1| = C_7^1.6! = 5040$.

(Vì B_1 là tập hợp tất cả các cách tặng 5 sách văn học và 1 sách khác. Cuốn sách khác tùy chọn trong 7 cuốn còn lại.

Tương tự: $|B_2| = C_8^2.6! = 20160$; $|B_3| = C_9^3.6! = 60480$.

Theo quy tắc cộng thì:

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 85680. \quad (3)$$

Từ (1) (2) (2) suy ra: $|C| = 665280 - 85680 = 579.600$.

B. PHÉP ĐẾM CÓ LẶP

Để giải bài toán về phép đếm có lặp, người ta quy về phép đếm không lặp và sử dụng các phương pháp giải như đã dùng trong §1.

Thí dụ 1

Cho tập hợp E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}. Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số không yêu cầu đôi một khác nhau (các chữ số này chọn từ tập hợp E) sao cho mỗi số tạo thành đều chia hết cho 4?

Giải

Như đã biết một số có từ hai chữ số trở lên chia hết cho 4 khi và chỉ khi hai số cuối của số đó chia hết cho 4.

Từ tập hợp E có thể chọn ra các số sau có hai chữ số mà chia hết cho 4:

12, 16, 24, 28, 32, 36, 44, 52, 56, 64.

Ta giải bài toán trên bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1: Chọn 2 số cuối, theo trên ta có số cách chọn $n_1 = 9$.

Bước 2: Chọn số hàng trăm, số cách chọn $n_2 = 6$.

Bước 3: Chọn số hàng nghìn, số cách chọn $n_3 = 6$.

Theo quy tắc nhân, số các số phải tìm là $n = n_1n_2n_3 = 9.6.6 = 324$.

Nhận xét:

- Ở đây không đòi hỏi các chữ số của số có 4 chữ số đôi một khác nhau, nên cho phép các số đã dùng rồi được dùng lại (phép đếm có lặp).

- Nếu bài toán đòi hỏi thêm: Các chữ số có 4 chữ số phải đôi một khác nhau. Các bạn thử giải bài toán về phép đếm không lặp này.

Đáp số: 96 số.

Thí dụ 2:

Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho số 1 có mặt tối đa 5 lần, các số 2, 3, 4 mỗi số có mặt tối đa 1 lần?

Giải

Dễ thấy số 1 có mặt tối thiểu 3 lần.

Gọi A_3 là tập hợp các số có 6 chữ số, sao cho số 1 có mặt 3 lần, mỗi số 2, 3, 4 có mặt 1 lần.

Gọi A_4 là tập hợp số có 6 chữ số, sao cho số 1 có mặt 4 lần, mỗi số 2, 3, 4 có mặt tối đa 1 lần (hoặc không có mặt).

Gọi A_5 là tập hợp số có 6 chữ số, sao cho số 1 có mặt 5 lần, mỗi số 2, 3, 4 có mặt tối đa 1 lần (hoặc không có mặt).

Tính $|A_3|$ bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để đặt 3 số 1. Số cách chọn là:

$$n_1 = C_6^3 = 20.$$

Bước 2: 3 vị trí còn lại đặt ba số 2, 3, 4. Số cách chọn là:

$$n_2 = 3! = 6.$$

theo quy tắc nhân $|A_3| = n_1n_2 = 120$.

Tương tự ta có $|A_4| = C_6^4A_3^2 = 90$,

$$|A_5| = C_6^5A_3^1 = 18.$$

Theo quy tắc cộng số các số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$|A_3| + |A_4| + |A_5| = 228 \text{ số}.$$

Thí dụ 3:

Biển số xe là một dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau: Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C,..., Z. Các chữ số được chọn từ 10 chữ số 0, 1, 2,...,8, 9. Có bao nhiêu biển số xe có hai chữ cái khác nhau, đồng thời có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó giống nhau?

Giải

Bước 1: Chọn hai chữ cái khác nhau, số cách chọn là $n_1 = A_{26}^2 = 650$.

Bước 2: Chọn hai số lẻ giống nhau, số cách chọn là $n_2 = 5$.

Bước 3: Chọn 2 vị trí trong 4 vị trí để đặt 2 chữ số lẻ giống nhau, vì thế đây là cách chọn 2 vị trí trong 4 vị trí mà không quan tâm đến thứ tự sắp xếp. Do vậy số cách chọn là $n_3 = C_4^2 = 6$.

Bước 4: Sắp xếp 2 số chẵn vào 2 vị trí còn lại. Đây là cách chọn 2 phần tử có thể lặp lại trong 5 phần tử. Mỗi vị trí đều có 5 cách chọn, nên số cách chọn là $n_4 = 5^2 = 25$.

Theo quy tắc nhân, số biển số xe thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$n = n_1n_2n_3n_4 = 650.5.6.25 = 487500.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, sao cho mỗi số có 6 chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của một số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối 1 đơn vị.

Đáp số: 108.

Bài 2:

Từ chín chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?

Đáp số: 90720.

Bài 3:

Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đứng cạnh nhau.

Đáp số: 360.

Bài 4:

Cho 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lập được bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ 10 số trên?

Đáp số: 36960.

Bài 5:

Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Đáp số: 126.

Bài 6:

Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa này xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra 1 bó hoa gồm 7 bông.

1/ Có mấy cách chọn bó hoa trong đó có đúng 1 bông màu đỏ?

2/ Có mấy cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 bông đỏ?

Đáp số: 1/ 112 2/ 150.

Bài 7:

Có 12 cây giống 3 loại: xoài, mít, ổi, trong đó có 6 cây xoài, 4 cây mít, 2 cây ổi. Muốn chọn ra 6 cây giống để trồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho số cây mít nhiều hơn số cây xoài ?

Đáp số: 172.

Bài 8:

Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam, 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người, sao cho có ít nhất 3 nữ.

Đáp số: 3690.

Bài 9:

Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 em trong lớp để trực tuần sao cho trong ba em đó luôn luôn có cán bộ lớp?

Đáp số: 1135.

Bài 10:

Trong một toa tàu có 2 ghế xa-lông đối mặt nhau, mỗi ghế có 4 chỗ ngồi. Trong số 8 hành khách, có 3 người muốn ngồi nhìn theo hướng tàu chạy, 2 người muốn ngồi ngược lại, 3 người còn lại không có yêu cầu gì. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp khách ngồi?

Đáp số: 1728.

Bài 11:

Số điện thoại của một thành phố có 6 chữ số được lựa chọn trong tập {0; 1; 2;...; 8; 9}.

1/ Có bao nhiêu số điện thoại gồm 3 cặp hai số giống nhau (tức là có dạng $\overline{ababab}$), chấp nhận cả số 000000?

2/ Có bao nhiêu số điện thoại mà số 6 có mặt 2 lần, số 2 và số 5 mỗi số có mặt đúng 1 lần và hai số còn lại có tổng chia hết cho 3?

Đáp số: 1/ 100 2/ 2700.