Chương 3
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Bài 1 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Loại 1 — CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG — CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

***1.** Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B và SA $\perp$ (ABC).

a. Chứng minh BC $\perp$ (SAB). Suy ra SB $\perp$ BC.

b. Gọi M và N là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC, MN cắt BC tại I. Chứng minh rằng AM $\perp$ (SBC); SC $\perp$ (AMN);

c. Chứng minh: AI $\perp$ SC

2. Cho tứ diện ABCD có AB = AC, DB = DC. Gọi I là trung điểm của BC.

a. Chứng minh BC $\perp$ (AID)

b. Vẽ đường cao AH của tam giác AID. Chứng minh AH $\perp$ (BCD).

***3.** Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA $\perp$ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

a. Chứng minh BC $\perp$ (SAB), CD $\perp$ (SAD); BD $\perp$ (SAC).

b. Chứng minh AH $\perp$ SC; AK $\perp$ SC. Suy ra AH, AI, AK đồng phẳng.

c. Chứng minh HK // BD, OH = OK

d. Chứng minh HK $\perp$ (SAC)

e. Chứng minh: AI $\perp$ HK

f. Tìm mặt phẳng trung trực của đoạn BD và HK. Giải thích.

4. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD lần lượt tại H, M, K.

a. Chứng minh AH ⊥ SB, AK ⊥ SD

$S_{\Delta MHK} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{18}$

b. Chứng minh BD // α . Suy ra BD // HK

c. Chứng minh HK qua trọng tâm của tam giác SAC.

***5.** Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Biết SA = SC và SB = SD.

a. Chứng minh SO ⊥ (ABCD).

b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC. Chứng minh rằng IJ ⊥ (SBD).

6. Cho hình vuông ABCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại H. Lấy điểm S (S ≠ H). Chứng minh:

a. AC ⊥ (SHK)

b. CK ⊥ DH và CK ⊥ SD

***7.** Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên (ABC). Chứng minh:

a. OA ⊥ BC, OB ⊥ CA, OC ⊥ AB

b. BC ⊥ (OAH) và AB ⊥ (OCH)

c. H là trực tâm của tam giác ABC

d. $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

e. Tam giác ABC là tam giác nhọn (các góc của tam giác ABC đều nhọn).

8. Cho tứ diện S ABC với góc tam diện đỉnh S vuông (SA, SB, SC, đôi một vuông góc)

a. Giả sử H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh SH ⊥ (ABC). Đảo lại có đúng không ? Tại sao ?

b. Chứng minh tam giác ABC là tam giác nhọn.

c. Giả sử tam giác ABC đều cạnh a. Tính SH theo a. Kéo dài HS một đoạn SD = HS. Chứng minh ABCD là tứ diện đều.

***9.** Cho tứ diện S.ABC có SA ⊥ (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh:

a. AH, SK, BC đồng qui.

b. SC ⊥ (BHK)

c. HK ⊥ (SBC)

10. Cho tứ diện SABC

a. Chứng minh điều kiện cần và đủ để SA ⊥ BC là:

$$SB^2 + AC^2 = SC^2 + AB^2$$

b. Chứng minh rằng nếu SA ⊥ BC và SB ⊥ CA thì SC ⊥ AB

***11.** Cho hình chóp SABC có hai mặt ABC và SAB là hai tam giác đều cạnh a, $SC = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, SC.

a. Chứng minh SC ⊥ AB

b. Chứng minh AJ ⊥ (SBC)

c. Tính IJ

d. Tìm $(\widehat{SA, BC})$

12. Cho đường tròn (C) đường kính AB nằm trong mặt phẳng α. Trên đường thẳng d vuông góc với α tại A lấy điểm S (S ≠ A). Lấy điểm M ∈ (C) (M ≠ A, M ≠ B)

a. Chứng minh MB ⊥ (SAM)

b. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SM Chứng minh: AK ⊥ (SMB) và SB ⊥ (AHK)

c. Gọi I = HK ∩ MB. Chứng minh: AI ⊥ (SAB) và AI là tiếp tuyến của (C).

d. Khi S di động trên d: Tìm tập hợp các điểm H và K. Chứng minh đường thẳng HK đi qua một điểm cố định.

e. Khi M di động trên (C), tìm tập hợp của điểm K.

Loại 2 THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐIỂM (HAY MỘT ĐƯỜNG THẲNG) CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.

***13.** Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. SA ⊥ (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Lấy điểm M tùy ý thuộc cạnh AB với AM = x $(0 < x < a)$. Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a. Tìm thiết diện của tứ diện và α .

b. Tính diện tích S của thiết diện này theo a và x.

c. Tìm x để S lớn nhất, tính giá trị lớn nhất này.

14. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a, SA ⊥ (ABC) và SA = a. Tìm thiết diện của tứ diện SABC với mặt phẳng α và tính diện tích của thiết diện trong các trường hợp sau:

a. α qua S và vuông góc với BC

b. α qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC.

c. α qua trung điểm M của SC và vuông góc với AB.

***15.** Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm của AH. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a. Gọi I là một điểm trên OH, đặt AI = x $(a < x < 2a)$, α là mặt phẳng qua I và vuông góc với OH.

a. Xác định mặt phẳng α .

b. Tìm thiết diện của tứ diện SABC và α .

c. Tìm hình tính của thiết diện

d. Tính diện tích S của thiết diện theo a và x.

e. Tìm x để S lớn nhất, tính giá trị lớn nhất này.

16. Cho tứ diện SABC có hai mặt ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a và $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Lấy điểm M thuộc cạnh AB với AM = x ($0 < x < a$). Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC, D là trung điểm của BC.

a. Chứng minh α // (SAD)

b. Tìm thiết diện của tứ diện SABC và α.

c. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

***17.** Cho hình chóp S. ABC đáy là tam giác vuông cân tại B; AB=BC= 2a. Cạnh SA $\perp$ (ABC) và $SA = a\sqrt{2}$

a. Chứng minh rằng các mặt của hình chóp là các tam giác vuông.

b. Gọi α là mặt phẳng trung trực của cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp và α.

c. Tìm hình tính của thiết diện.

d. Tính diện tích của thiết diện.

e. Gọi d là đường thẳng vuông góc với (ABC) tại trung điểm K của BC. Tìm $d \cap \alpha$.

18. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác đều cạnh a. SA $\perp$ (ABC) và SA = a. Lấy điểm M tùy ý thuộc cạnh AC. Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AC.

a. Tùy theo vị trí của M trên cạnh AC, tìm thiết diện của tứ diện và α.

b. Đặt CM = x ($0 < x < a$). Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x.

c. Tìm x để S có giá trị lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

***19.** Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông cạnh a. SA $\perp$ (ABCD) và SA = a. Lấy điểm M tùy ý thuộc đoạn AC với AM

$= x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$ Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AC

a. Chứng minh: $BD \perp (SAC)$

b. Chứng minh $BC \perp (SAB)$

c. Tùy theo vị trí của M trên đoạn AC, tìm thiết diện của hình chóp và α.

d. Tính diện tích của thiết diện trên theo a và x.

20. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng vuông góc với (ABCD) tại O lấy điểm S sao cho $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng α qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Tính AN. Chứng minh N là trung điểm cạnh SC.

b. Chứng minh MP // BD. Suy ra cách dựng M, P.

c. Chứng minh tứ giác AMNP có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích tứ giác này.

***21.** Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi α là mặt phẳng qua AB và vuông góc với SD.

a. Chứng minh các tam giác SBC và SCD là các tam giác vuông.

b. Tìm thiết diện của hình chóp và α.

c. Tìm hình tính của thiết diện.

d. Cho $AB = 2a$, $AD = a$, $SA = a$. Tính diện tích của thiết diện theo a.

22. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Lấy điểm M tùy ý thuộc cạnh AB với $BM = x$ $(0 < x < a)$. Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a. Tìm thiết diện của hình chóp và α.

b. Tìm hình tính của thiết diện