

5. Cho hình chóp  $SABC$ . trong các miền tam giác  $SAB, SBC, SCA$  lần lượt lấy các điểm  $L, M, N$  sao cho các đường thẳng  $LM, MN, NL$  đều cắt  $mp(ABC)$ .
- a/ Xác định các giao điểm  $I, J, K$  của  $mp(ABC)$  lần lượt với các đường thẳng  $LM, MN, NI$ .
- b/ Chứng minh rằng :  $I, J, K$  thẳng hàng.
- c/ Xác định thiết diện của hình chóp với  $(LMN)$

Chương II

QUAN HỆ SONG SONG

A. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

1. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thang, đáy lớn  $AB$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB$ .
- Chứng minh rằng :  $MN // CD$ .
2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình vuông. Gọi  $H, K$  lần lượt trên  $SA, SB$  sao cho  $\frac{SH}{SA} = \frac{SK}{SB} = \frac{1}{3}$
- Chứng minh rằng :  $HK // CD$ .
3. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm  $\Delta ABC$  và  $\Delta ABD$ .
- Chứng minh rằng :  $IJ // CD$ .
4. Cho hình chóp  $SABCD$  đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $SA, SC, CD, AD$ .
- Chứng minh rằng :  $MN // PQ$ .
5. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, BC, AD, AC, BD$ .
- a/ Chứng minh rằng :  $MPNQ$  là hình bình hành.
- b/ Chứng minh rằng :  $MN, PQ, RS$  đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

B. GIAO TUYẾN HAI MẶT PHẲNG

1. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $BC, AC$ , và  $M \in AD$ . Tìm

- giao tuyến (MIJ) và (ABD).
- Cho hình chóp SABCD, đáy hình vuông. Gọi  $M \in SC$ . Tìm giao tuyến (MAD) và (SBC).
  - Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AC. Tìm giao tuyến (BCD) và (DMN).
  - Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông. Gọi I, K lần lượt là trung điểm SB, SD. Tìm giao tuyến :
    - (CDI) và (SAB).
    - (AIK) và (ABCD)
    - (KBC) và (SAD)
  - Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm AB, AC. Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa MN cắt CD, BD tại E, F.
    - Chứng minh rằng : MNEF là hình thang.
    - Xác định  $(\alpha)$  để MNEF là hình bình hành.
  - Cho hình chóp SABCD, đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB và  $E \in SC$ .
    - Tìm giao tuyến (MBC) và (SAD).
    - Gọi F là giao điểm của SD và (MNE). Chứng minh rằng : MNEF thường là hình thang.
  - Cho hình chóp SABCD đáy hình vuông, tâm O. Gọi H, K lần lượt trên SA, SD sao cho HK song song AD.
    - Tìm giao tuyến (SAB) và (HCD); (OHK) và (ABCD).
    - Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa HK và cắt SC, SD tại M, N. Chứng minh rằng : HKMN là hình thang. Khi nào HKMN là hình thoi.
  - Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD, BC và G là trọng tâm  $\Delta SAB$ 
    - Tìm  $(SIJ) \cap (SAB)$  và  $(GIJ) \cap (SAB)$
    - Xác định thiết diện của hình chóp với (GIJ). Thiết diện là hình gì?

C. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG

1. Cho hình chóp  $SABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, SB$ .

Chứng minh rằng :  $SA // (CMN)$ .

2. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy lớn là hình bình hành, tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, AD$  và  $I, J$  lần lượt trên  $SM, SN$  sao cho:

$$\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$$

a/ Chứng minh rằng :  $MN // (SED)$

b/ Chứng minh rằng :  $IJ // (SBD)$

c/ Chứng minh rằng :  $SC // (IJO)$

3. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABD$  và  $M \in BC$  thỏa  $MB = 2MC$ .  
Chứng minh rằng :  $MG // (ACD)$

4. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy hình thang, đáy lớn  $AD$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD, SA$ .

Chứng minh rằng :  $MN // (SBC), SB // (MNP), SC // (MNP)$

5. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình vuông tâm  $O$ . Gọi  $M, K$  lần lượt là trung điểm  $SB, SD$ .

Chứng minh rằng :  $BD // (AMK); MO // (SCD); SB // (AKO)$

6. Cho hình chóp  $SABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt trên  $AB, BC$ ,  $mp(\alpha)$  qua  $MN$  và song song  $SB$  cắt  $SA, SC$  tại  $Q, P$ .

Chứng minh rằng :  $MNPQ$  là hình thang

7. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình vuông. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD$ .  $mp(\alpha)$  qua  $MN$  cắt  $SB, SC$  tại  $Q, P$ .

a/ Chứng minh rằng :  $BC // (MNPQ)$

b/ Chứng minh rằng :  $MNPQ$  là hình thang. Khi nào  $MNPQ$  là hình bình hành ?

8. Cho hình chóp  $SABCD$  đáy hình thang, đáy lớn  $AD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là

trung điểm của  $AB, CD$ . Gọi  $P \in SD$

a/ Chứng minh rằng :  $AD // (MNP)$

b/ Hình tính thiết diện của hình chóp  $SABCD$  và  $(MNP)$

c/ Gọi  $I$  là giao điểm  $AB$  và  $CD$ . Tìm điều kiện của  $M$  để thiết diện trên là hình bình hành.

9. Cho hình chóp  $SABCD$ .  $M, N$  là hai điểm trên  $AB, CD$ .  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $MN$  và song song  $SA$ .

a/ Tìm các giao tuyến của  $(\alpha)$  với  $(SAB)$  và  $(SAC)$

b/ Xác định thiết diện của hình chóp với  $(\alpha)$

c/ Tìm điều kiện của  $MN$  để thiết diện là hình thang.

10. Cho hình chóp  $SABCD$ , đáy là hình bình hành tâm  $O$ .  $M$  là trung điểm  $SB$ . Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(\alpha)$  trong các trường hợp sau:

a/  $(\alpha)$  qua  $M$  và song song với  $SO, AD$

b/  $(\alpha)$  qua  $O$  và song song với  $AM, SC$

#### **D. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG**

1. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB, BC$ .

Chứng minh rằng :  $(MNP) // (SCD)$

2. Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm  $AC, BC, CD$

Chứng minh rằng :  $(IJK) // (ABD)$

3. Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD$ .

Chứng minh rằng :  $(OMN) // (SBC)$

4. Cho hình chóp  $SABCD$  đáy hình thang, đáy lớn  $AB$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm  $SA, AD, BC$ .

Chứng minh rằng :  $(IJK) // (SCD)$ .

5. Từ các đỉnh của hình bình hành  $\bar{A}BCD$ , dựng các nửa đường thẳng  $Ax, By$ .

Cz. Dt song song và ở cùng phía đối với mp (ABCD). Một mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại  $A', B', C', D'$ .

- a/ Chứng minh rằng : mp  $(AA', BB')$  // mp  $(CC', DD')$
- b/ Chứng tỏ  $A'B'C'D'$  là hình bình hành
- c/ Chứng minh rằng :  $AA' + CC' = BB' + DD'$ .

**E. HÌNH LĂNG TRỤ**

1. Cho hình lăng trụ tam giác ABC . A'B'C'. Gọi H là trung điểm A'B'.
  - a/ Chứng minh rằng :  $CB' // mp (AHC')$
  - b/ Tìm giao tuyến  $(AB'C')$  và  $(A'BC)$
2. Cho lăng trụ ABC. A'B'C'. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm BC, B'C'
  - a/ Chứng minh rằng :  $AI // A'I'$ .
  - b/ Tìm giao điểm IA' và mp  $(AB'C')$
3. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'
  - a/ Tìm giao tuyến  $(BA'C')$  và  $(ABCD)$
  - b/ Chứng minh rằng : mp  $(BDA')$  // mp  $(B'D'C)$
  - c/ Tìm giao điểm B'D và mp  $(BA'C')$

**ÔN TẬP CHƯƠNG II**

1. Cho hình chóp SABCD. Gọi M, N lần lượt trên AB, CD và mp  $(\alpha)$  qua MN song song với SA.
  - a/ Tìm các giao tuyến của  $(\alpha)$  với  $(SAB)$  và  $(SAC)$
  - b/ Xác định thiết diện của hình chóp với  $(\alpha)$
  - c/ Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang
2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm AD và BD. Mặt phẳng  $(\alpha)$  qua IK cắt CA, CB lần lượt tại M, N.
  - a/ Tứ giác MNKI có tính chất gì ? Với vị trí nào của  $(\alpha)$  tứ giác đó là hình bình hành?

- b/ Gọi  $O$  là giao điểm  $MI$  và  $NK$ . Chứng tỏ rằng  $O$  luôn luôn nằm trên đường thẳng cố định.
- c/ Gọi  $d = (\alpha) \cap (OAB)$ . Chứng minh rằng : Khi  $(\alpha)$  thay đổi thì  $d$  luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.
3. Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của 2 cạnh  $AA'$  và  $CC'$ . Gọi  $P \in DD'$
- a/ Xác định giao điểm  $Q$  của  $BB'$  và  $(MNP)$ .
- b/ Mặt phẳng  $(MNP)$  cắt hình hộp theo 1 thiết diện. Thiết diện đó có tính chất gì?
- c/ Tìm  $(MNP) \cap (ABCD)$

Chương III

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

**A. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG**

1. Cho tứ diện  $ABCD$  có mặt  $ABC$  và  $ABD$  là tam giác vuông tại  $B$ , mặt  $BCD$  là tam giác vuông tại  $C$ .
- a/ Chứng minh rằng :  $AB \perp (BCD)$
- b/ Chứng minh rằng :  $CD \perp (ABC)$
- c/ Gọi  $BH$  là đường cao  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng :  $BH \perp (ACD)$
2. Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình thoi tâm  $O$  và  $SA = SC, SB = SD$ .
- a/ Chứng minh rằng :  $SO \perp (ABCD)$
- b/ Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $BA, CB$ . Chứng minh rằng :  $(SBD)$  là mặt trung trực  $IJ$ .
3. Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông và  $SA \perp (ABCD)$
- a/ Chứng minh rằng :  $BD \perp (SAC)$
- b/ Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm  $SC, SD$ . Chứng minh rằng :  $IJ \perp (SAD)$
4. Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$ . Trên đường thẳng vuông góc với  $(ABCD)$  tại  $H$ , lấy 1 điểm  $S$ . Chứng minh rằng :