

Chương 2
QUAN HỆ SONG SONG

Bài 1

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Loại 1

CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

- 1* Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC, BD. Lấy P thuộc cạnh AB ($P \neq A, P \neq B$). Gọi $I = PD \cap AN, J = PC \cap AM$. *P: như sau*
- Chứng minh: $IJ \parallel CD$.
 - Gọi K thuộc cạnh CD. Tìm $(ABK) \cap (AMN)$.
2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác ABC, tam giác ABD. Chứng minh: $IJ \parallel CD$.
- 3* Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB ($AB > CD$). Gọi M, N là trung điểm SA, SB.
- Chứng minh: $MN \parallel CD$.
 - Tìm $P = SC \cap (ADN)$.
 - Gọi $I = AN \cap DP$. Chứng minh: $SI \parallel AB \parallel CD$.
 - Tìm hình tính tứ giác SABI.
4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt trên cạnh BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel SB, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$.
- Chứng minh: $PQ \parallel SA$.
 - Gọi $K = MN \cap PQ$. Chứng minh: $SK \parallel AD \parallel BC$.
 - Qua Q dựng $Qx \parallel SC$; tìm $Qx \cap (SAE)$.
 - Qua Q dựng $Qy \parallel SB$; tìm $Qy \cap (SCD)$.

Loại 2

- TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẪNG LẦN LƯỢT CHỨA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG
- THIẾT DIỆN QUA 1 ĐƯỜNG THẲNG MÀ ĐƯỜNG THẲNG ĐÓ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

5*. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, AD, SA.

- a. Tìm $(SBD) \cap (SIJ)$.
- b. Lấy M thuộc đoạn SI sao cho $SM = 2MI$. Gọi $N = SJ \cap DK$. Tìm $(CMN) \cap (ABCD)$.

6. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm của AC, BC. Lấy P thuộc cạnh BD ($P \neq B, P \neq D$).

- a. Tìm $(MNP) \cap (ABD)$.
- b. Gọi $Q = AD \cap (MNP)$. Khi nào MNPQ là hình bình hành.
- c. Giả sử $I = MQ \cap NP$. Tìm $(MNP) \cap (ABI)$.

7*. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy $AD = a, BC = b$. Gọi I, J là trọng tâm của tam giác SAD, tam giác SBC.

- a. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của mp (ADJ) với mặt (SBC) của hình chóp.
- b. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của mp (BCI) với mặt (SAD) của hình chóp.

8*. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD.

- a. Tìm $(GBC) \cap (SAD)$
- b. Tìm hình tính thiết diện của hình chóp S. ABCD và mp (GBC)

9. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông cạnh a sao cho tam

giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K là trung điểm của SA, SB và M là một điểm trên cạnh AD.

- Tìm thiết diện MHN của hình chóp và mp (MHK).
- Tìm hình tính thiết diện MHN
- Đặt $AM = x$ ($0 \leq x \leq a$). Tính diện tích thiết diện MHN theo a và x. Tính x để diện tích này nhỏ nhất.
- Tìm tập hợp giao điểm của HM và KN, của HN và KM.
- Qua D dựng $Dx \parallel SC$. Tìm $I = Dx \cap (SAB)$. Chứng minh $AI \parallel SB$
- Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD và mp (AIC).

Loại 3 | GÓC CỦA 2 ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

10* Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CA, AD.

- Tìm hình tính của tam giác IJK.
- Chứng minh: $AB \perp CD$.

11. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của BC, CA, DA, DB.

- Chứng minh rằng nếu $AB \perp CD$ thì IJKL là hình chữ nhật.
- Chứng minh rằng nếu $AB = CD$ thì $IK \perp JL$.

12. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC, AD, biết $AB = CD = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc của AB và CD.

Bài 2

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

Loại 1

CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

1* Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N là trung điểm của AB, AD. Gọi I, J thuộc đoạn SM,

SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$

- a. Chứng minh: $MN \parallel (SBD)$
- b. Chứng minh: $IJ \parallel (SBD)$
- c. Chứng minh: $SC \parallel (IJO)$

2. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

- a. Chứng minh $OO' \parallel (ADF)$ và $OO' \parallel (BCE)$.
- b. Gọi M, N là hai điểm thỏa: $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$ Chứng minh: $MN \parallel (DEF)$.

3*. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm của BC, BD. Gọi M, N là trung điểm của AI, CJ. Chứng minh: $MN \parallel (ACD)$.

4. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm AB, CD.

- a. Chứng minh $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$
- b. Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh $SB \parallel (MNP)$, $SC \parallel (MNP)$
- c. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, I thuộc đoạn BD sao cho $BI = \frac{1}{3} BD$. Chứng minh $GI \parallel (SAB)$.

Loại 2

— TÌM GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẪNG SONG SONG HAY CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC
 — THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI 1 ĐƯỜNG THẲNG HOẶC LÀ SONG SONG VỚI 2 ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU CHO TRƯỚC

5*. Cho tứ diện S. ABC. Gọi M, N là trung điểm của AB, SB.

- a. Chứng minh $SA \parallel (CMN)$
- b. Tìm $(CMN) \cap (SAC)$

6. Cho tứ diện ABCD, AE là trung tuyến của tam giác ACD và I thuộc đoạn AE. Mặt phẳng α qua BI và song song với CD cắt AC tại M và AD tại N.
- Chứng minh $MN \parallel CD$
 - Tìm $(BMN) \cap (BCD)$
- 7*. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình thang có đáy lớn là AD. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Gọi P thuộc cạnh SD ($P \neq S, P \neq D$)
- Chứng minh: $MN \parallel (SAD)$
 - Tìm $(MNP) \cap (SAD)$.
 - Tìm hình tích thiết diện của hình chóp S. ABCD và mp (MNP).
 - Gọi $I = AB \cap CD$. Chứng minh rằng nếu $SI \parallel (MNP)$ thì thiết diện ở trên là hình bình hành.
8. Cho hình chóp S. ABCD. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD. Gọi α là mặt phẳng qua MN và $\alpha \parallel SA$.
- Tìm $\alpha \cap (SAB), \alpha \cap (SAC)$
 - Tìm thiết diện của hình chóp và α .
 - Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.
9. Cho hình chóp S. ABCD. Gọi $E = AB \cap CD; F = AD \cap BC$. Gọi α là mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' .
- Chứng minh rằng nếu $SE \parallel \alpha$ thì $A'B'C'D'$ là hình thang.
 - Chứng minh rằng nếu $SE \parallel \alpha$ và $SF \parallel \alpha$ thì $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- 10*. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = CD = a$ và $AB \perp CD$. Lấy M thuộc cạnh AC với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng α qua M và song song với AB, CD cắt BC, BD, AD lần lượt tại N, P, Q.

- a. Chứng minh: $MNPQ$ là hình chữ nhật.
- b. Tính diện tích $MNPQ$ theo a và x .
- c. Định x để diện tích $MNPQ$ lớn nhất.
- d. Định x để $MNPQ$ là hình vuông.

11. Cho hình chóp $S. ABCD$ có đáy là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a$. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại A . Trên cạnh AD lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Mặt phẳng α qua M và song song với SA và CD cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- a. Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.
- b. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ theo a và x .

12. Cho hình chóp $S. ABCD$ có đáy là hình thang ($AD // BC$) với $AB = BC = a, AD = 2a, SB \perp AD$ và $SB = b$. Lấy M thuộc cạnh AB với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng α qua M và song song với SB, AD , cắt CD, SD, SA lần lượt tại N, P, Q .

- a. Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.
- b. Tính diện tích $MNPQ$ theo a, b, x .
- c. Định x để diện tích $MNPQ$ lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Loại 3 | TOÁN TỔNG HỢP

13*. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi I, J, K là trung điểm của BC, CA, BD .

- a. Chứng minh $IJ // (ABD), IK // (ACD)$
- b. Tìm $(ACK) \cap (ADI)$
- c. Gọi $L = AD \cap (IJK)$. Tìm hình tính tứ giác $IJLK$.
- d. Cho $IL = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính diện tích $IJLK$.

14. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c$. Lấy M thuộc cạnh BC với $BM = x$. Gọi α là mặt phẳng qua M và

song song với AB, CD . Giả sử α cắt BD, DA, AC tại N, P, Q .

- Tìm hình tính thiết diện $MNPQ$.
- Định x để diện tích $MNPQ$ lớn nhất

15* Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là điểm trên BC thỏa $\frac{BM}{BC} = k$ ($0 < k < 1$). Mặt phẳng α qua M và song song với AB, CD , cắt BD, AD, AC tại N, P, Q .

- Tìm hình tính thiết diện $MNPQ$
- Tìm diện tích $MNPQ$ theo a, k .
- Định k để diện tích $MNPQ$ lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó. Khi đó tìm hình tính $MNPQ$.

16. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M là điểm di động trên cạnh AC . Qua M dựng mp α song song với AB và CD , cắt BC, BD, AD lần lượt tại N, P, Q .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Gọi $O = NQ \cap MP$. Tìm tập hợp điểm O khi M di động trên cạnh AC .
- Cho $AB \perp CD, AB = a, BC = CD = b, CA = c, CM = x$ ($0 < x < c$). Tính diện tích S của $MNPQ$ theo a, b, c và x . Tìm vị trí của M trên cạnh AC để S lớn nhất.

Bài 3

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Loại 1 CHỨNG MINH HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

*1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) // (BCD)$

*2. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SD.

a. Chứng minh: $(OMN) // (SCD)$

b. Chứng minh: $(PMN) // (ABCD)$

c. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của BC, OM. Chứng minh rằng: $KI // (SCD)$.

*3. Cho 2 hình vuông ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN \neq 0$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a. Chứng minh $(CBE) // (ADF)$

b. Chứng minh $(DEF) // (MNN'M')$

c. Khi M, N di động trên các đường chéo AC, BF. Chứng minh MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

*4. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD.

a. Chứng minh $(OMN) // (SBC)$

b. Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm thuộc $(ABCD)$ và cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ // (SAB)$.

c. Giả sử hai tam giác SAD và ABC cân tại A. Gọi AE, AF là phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF // (SAD)$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .
- Chứng minh $(HIK) \parallel (ABCD)$.
 - Gọi $M = AI \cap DK, N = DH \cap CI$. Chứng minh $(SMN) \parallel (HIK)$.
6. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b .
- Gọi α là mặt phẳng chứa a và song song với b, β là mặt phẳng chứa b và song song với a . Chứng minh $\alpha \parallel \beta$.
 - Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên a và b . Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN .
 - Giả sử MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định (P) . Tìm tập hợp của điểm I .
7. Cho hai nửa đường thẳng Ax và By chéo nhau. Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho $AM = BN$.
- Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
 - Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi M, N di động.
8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ đồng phẳng.

Loại 2 — TÌM GIAO TUYẾN CỦA 2 MẶT PHẪNG DỰA VÀO ĐỊNH LÝ VỀ PHƯƠNG GIAO TUYẾN DẠNG 4.
— THIẾT DIỆN CẮT BỞI MỘT MẶT PHẪNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẪNG CHO TRƯỚC.

- *9. Cho hai mặt phẳng song song α và β . Trong α cho tam giác ABC và trong β cho đoạn thẳng MN .
- Tìm $(MAB) \cap \beta$
 - Tìm $(NAC) \cap \beta$

c. Tìm $(MAB) \cap (NAC)$

10. Cho hai tam giác ABC và DEF lần lượt ở trên hai mặt phẳng α và β song song.

- Tìm $(AEF) \cap \alpha$
- Tìm $(DBC) \cap \beta$
- Tìm $(AEF) \cap (DBC)$

***11.** Cho hình bình hành $ABCD$. Dụng bốn nửa đường thẳng Ax , By , Cz , Dt song song cùng chiều và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng α cắt bốn nửa đường thẳng trên lần lượt tại A' , B' , C' , D' .

- Chứng minh $(Ax, By) // (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) // (By, Cz)$.
- Tìm $(Ax, Cz) \cap (By, Dt)$.
- Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- Chứng minh: $AA' + CC' = BB' + DD'$

***12.** Cho hình chóp $S. ABCD$ đáy là hình bình hành với $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt SAB là tam giác vuông cân tại A . Trên cạnh AD lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < 2a$). Mặt phẳng α qua M và song song với (SAB) cắt BC , SC , SD lần lượt tại N , P , Q .

- Xác định mặt phẳng α .
- Tìm thiết diện của hình chóp và α .
- Tìm hình tính của thiết diện.
- Tính diện tích S của thiết diện theo a và x .
- Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP khi x biến thiên trong khoảng $(0, 2a)$.

***13.** Cho hình chóp $S. ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi E là trung điểm của SB . Tam giác ACE đều và $AC = OD = a$. Mặt phẳng α di động qua điểm I thuộc đoạn OD và song song với (ACE) cắt AD , CD , SC , SB , SA lần lượt tại M , N , P , Q , R .

- Tìm hình tính tam giác PQR và tứ giác MNPR.
- Tìm tập hợp giao điểm K của MP và NR khi I di động trên đoạn OD.
- Tính diện tích S của đa giác MNPQR theo a và $x = DI$.
- Tính x để S lớn nhất.

14. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Trên đoạn AC lấy điểm I với $AI = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng α qua I và song song với (SBD).

- Tìm thiết diện của hình chóp và α .
- Tính diện tích S của thiết diện theo a, b và x.

*15. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 2a$. Các tam giác SAC và SAD vuông tại A. Lấy điểm M thuộc cạnh AD với $AM = x$ ($0 < x < 2a$).

Mặt phẳng α qua M và song song với (SCD).

- Tìm thiết diện của hình chóp và α .
- Tìm hình tính của thiết diện.
- Tính diện tích S của thiết diện theo a và x.
- Tính x để S lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

16. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông cạnh a. Trên cạnh AB lấy điểm M với $AM = x$ ($0 < x < a$). Mặt phẳng α qua M và song song với (SAD) cắt SB, SC, CD lần lượt tại N, P, Q.

- Tìm hình tính tứ giác MNPQ.
- Tìm tập hợp giao điểm I của MN và PQ khi M vạch đoạn AB.
- Cho tam giác SAD vuông tại A và $SA = a$. Tính diện tích S của MNPQ theo a và x.

d. Tính x để $S = \frac{3a^2}{8}$