e. Tính d [B, (SCD)] ; d [I, (SDK)].

f. Tính Sđ (A,CD,S) và Sđ (B,SC,D).

g. Tính góc giữa SA, SB, SC, SD và (ABCD).

h. Tính góc giữa SI và (SCD).

k. Tính góc giữa SC, SD và (SAB).

l. Tính góc giữa (SBC), (SCD), (SDA) và (ABCD).

m. Tính góc giữa (SAB) và (SCD) ; (SAD) và (SBC).

Loại 3 | THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

***16.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a ; SA $\perp$ (ABCD) và SA $= a\sqrt{3}$. Gọi α là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD).

a. Xác định α .

b. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD và α .

c. Tìm hình tính của thiết diện.

d. Tính diện tích thiết diện.

17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = AC = a ; SA $\perp$ (ABCD) và DA = a. Gọi α là mặt phẳng qua SD và vuông góc với (SAC).

a. Chứng minh: (SAD) $\perp$ (SDC) và (SAC) $\perp$ (SBC).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD).

c. Xác định α .

d. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD và α .

e. Tính diện tích của thiết diện.

***18.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a ; SA $\perp$ (ABCD) và SA = a. Gọi E là trung điểm của SA. Lấy điểm M thuộc cạnh AD và AM = x $(0 \leq x \leq a)$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAD).

a. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD và α.

b. Tìm hình tính thiết diện.

c. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

d. Tìm tập hợp các hình chiếu của D trên α khi M di động từ A đến D.

19. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B ; $AB = a$; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SC và SB ; M là một điểm trên cạnh AB với $AM = x$ $(0 \le x \le a)$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAB).

a. Xác định mặt phẳng α.

b. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABC và α.

c. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

d. Gọi K là hình chiếu của S trên α. Tìm tập hợp các điểm K khi M di động trên cạnh AB.

20. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là mặt phẳng qua A, song song với BC và vuông góc với (SBC). Gọi I là trung điểm của BC.

a. Xác định α.

b. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABC và α.

c. Tìm hình tính thiết diện.

d. Tính $d(I, \alpha)$.

e. Tính (AB, α).

21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a ; tâm O. $SO \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của CD. Gọi φ là góc giữa SI và (ABCD). Gọi α là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD).

a. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD và α .

b. Định φ để tồn tại thiết diện.

c. Tính diện tích thiết diện theo a và φ.

Bài 4 — KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Loại 1 — DỰNG ĐOẠN VUÔNG GÓC CHUNG, TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

***1.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a. SA và BC

b. SA và CD

c. SA và BD

d. SC và BD

e. SC và AB

f. SB và AD

g. SB và CD

h. SB và AC

k. SO và AD

2. Cho tứ diện ABCD với AC = AD = BC = BD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

***3.** Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a. OA và BC

b. AI và OC

4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a ; $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$.

a. Tính $(\widehat{AB, SC})$.

b. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC.

***5.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và (SAD) $\perp$ (ABCD). Gọi I là trung điểm của AD, M là trung điểm của AB, F là trung điểm của SB và K = CM $\cap$ BI.

a. Chứng minh: (CMF) $\perp$ (SIB).

b. Chứng minh: tam giác BKF cân tại K.

c. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

d. Tính d (CM,SA).

6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a ; BC = $a\sqrt{2}$; tam giác SAB đều và (SAB) $\perp$ (ABCD). Gọi I là trung điểm của AB.

a. Tính d [I, (SCD)].

b. Tính $([SI, \widehat{(SCD)}])$.

c. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC.

d. Tính Sđ (S,CD,A).

***7.** Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^o$; SO $\perp$ (ABCD) và SO = a.

a. Chứng minh: (SAC) $\perp$ (SBD).

b. Tính Sđ (S,BC,A).

c. Tính d [O, (SBC)].

d. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và SB.

e. Tính $[\widehat{SB, (SAC)}]$.

Loại 2 | TÍNH KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG - KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

***8.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a ; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

a. Tính d [A, (SCD)] ; d [B, (SCD)].

b. Tính d [O, (SCD)].

c. Tính d [AD, (SBC)] ; d [AB, (SCD)].

d. Gọi α là mặt phẳng qua O và vuông góc với BC. Tính d [α , (SAB)].

9. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a ; $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi α là mặt phẳng qua A, song song với BC và vuông góc với (SBC) ; cắt SB và SC lần lượt tại B', C'. Tính:

a. d [A, (SBC)] b d (S, α) c. d (BC, α)

10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a. $SA \perp (ABCD)$ và SA = 2a. Tính:

a. d [A, (SCD)] , d [A, (SBC)].

b. d [CD, (SAB)] , d [AB, (SCD)].

c. d [DE, (SBC)] , E là trung điểm của AB.

d. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng. SA và BC ; SB và DC ; SC và AB. SC và AD ; SD và AB ; SD và BC.

Bài 5 HÌNH CHIẾU CỦA GÓC VUÔNG VÀ CỦA ĐA GIÁC

Loại 1 | HÌNH CHIẾU CỦA 1 GÓC VUÔNG

***1.** Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O, các tia Ax, By, Cz, Dt vuông góc với (ABCD) và ở cùng phía đối với (ABCD). Trên Ax lấy A' sao cho OA' = a, trên Cz lấy C' sao cho A'C' = 2a.

a. Tính CC' theo a. Chứng minh tam giác OA'C' vuông tại A' và A'C' $\perp$ (BA'D).

b. Trên By lấy B' sao cho BB' = x, trên Dt lấy D' sao cho DD' = y. Tìm hệ thức giữa x,y và a để cho A'B'C'D' đồng phẳng. Khi đó chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

c. Tìm x để D $\in$ (A'B'C').

d. Tìm x để hình bình hành A'B'C'D' là hình thoi hoặc là hình chữ nhật.

2. Cho hình vuông ABCD, các tia Ax, By, Cz, Dt vuông góc với (ABCD) và ở cùng phía đối với (ABCD). Một mặt phẳng α lần lượt cắt Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C',D'.

a. Tìm hình tính tứ giác A'B'C'D'.

b. Chứng minh: AA' + CC' = BB' + DD'.

c. Tìm điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình thoi.

d. Tìm điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình chữ nhật.

Loại 2 — DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐA GIÁC. — GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

***3.** Cho hình thoi ABCD có A thuộc mặt phẳng α, các đỉnh khác không thuộc α sao cho $AC = a\sqrt{2}$; BD = a và BD // α. Chiếu hình thoi lên mặt phẳng α ta được hình vuông AB'C'D'.

a. Tính diện tích của ABCD và AB'C'D'. Suy ra góc giữa (ABCD) và α.

b. Gọi $E = CD \cap \alpha$, $F = CB \cap \alpha$. Tính diện tích của các tứ giác BDEF và B'D'EF.

4. Cho tam giác ABC vuông tại B, AB = 2a, BC = a. Dựng 2 tia Bx, Cy vuông góc với (ABC) và ở cùng phía đối với (ABC). Trên Bx lấy B' sao cho BB' = a, trên Cy lấy C' sao cho CC'=x

a. Tìm x theo a để: $\widehat{AB'C'} = 90^\circ$.

b. Biết: $\widehat{AB'C'} = 90^o$. Tìm a để có: $S_{A'B'C'} = 2S_{ABC}$

***5.** Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $\widehat{BSC} = 90^o$, $SB = 2a$, $SC = a\sqrt{2}$.

a. Tính $[\widehat{(SBC), (ABC)}]$.

b. Tính diện tích tam giác ABC.

6. Cho tam diện vuông Oxyz. Lấy trên Ox, Oy, Oz lần lượt ba đoạn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Gọi α, β, γ lần lượt là số đo của các nhị diện cạnh BC, CA, AB. Chứng minh:

a. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$ với $H = hcO/(ABC)$.

b. $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ với S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABC, OBC, OCA, OAB.

c. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Chúc các em học tập tiến bộ