I. ÁP DỤNG NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH HỆ THứC VÀ TÍNH TỔNG TỔ HỢP.

I. Thuần nhị thức Newton

Dấu hiệu nhận biết: Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta sẽ dùng trực tiếp nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Việc còn lại chỉ là khéo léo chọn a,b

Ví dụ 1.1: Tính tổng $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ... + C_{16}^{16}$

Dễ dàng thấy tổng trên có dạng như dấu hiệu nêu trên. Ta sẽ chọn $a = 3, b = -1$. Khi đó tổng trên sẽ bằng $(3-1)^{16} = 2^{16}$

Ví dụ 1.2: Chứng minh rằng:

$$C_{2001}^0 + 3^2C_{2001}^2 + 3^4C_{2001}^4 + ... + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = 2^{2000}\left(2^{2001} - 1\right)$$

Tương tự như trên, ta nghĩ ngay đến việc dùng nhị thức với $a = 1$, $b = 3$:

$$C_{2001}^0 + 3^1C_{2001}^1 + 3^2C_{2001}^2 + 3^3C_{2001}^3 +$$

$$+3^4C_{2001}^4 + ... + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = (3+1)^{2001} = 4^{2001}$$

Nhưng tổng cần tìm chỉ chứa các số hạng có C_{2001}^k với k chẵn nên ta phải triệt tiêu được các số hạng "lẻ" bằng cách tính tổng khác với $a = 1$, $b = -3$

$$C_{2001}^0 - 3^1C_{2001}^1 - 3^2C_{2001}^2 - 3^3C_{2001}^3 +$$

$$+3^4C_{2001}^4 + ... + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = (3-1)^{2001} = 2^{2001}$$

Do đó tổng cần tìm là $\dfrac{4^{2001}+2^{2001}}{2}=2^{2000}\left(2^{2001}-1\right)$

Bài tập tương tự:

1. Chứng minh rằng: $2^nC_n^0+2^{n-1}.7^1.C_n^1+2^{n-2}.7^2.C_n^2+...+7^nC_n^n=9^n$

2. Chứng minh rằng: $C_n^33^n-C_n^13^{n-1}+...+(-1)^nC_n^n=C_n^0+C_n^1+...C_n^n$

II. Sử dụng đạo hàm cấp 1,2

1. Đạo hàm cấp 1

Dấu hiệu: Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ $1,2,3,\ldots n$ hay $n,\ldots,3,2,1$ tức số hạng đó có dạng kC_n^k hoặc $kC_n^ka^{n-k}b^{k-1}$ thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 đến tính.

Cụ thể

$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+C_n^2a^{n-2}x^2+C_n^3a^{n-3}x^3+...+C_n^nx^n$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được :

$n(a+x)^{n-1}=C_n^1a^{n-1}+2C_n^2a^{n-2}+3C_n^3a^{n-3}x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$ (1)

Đến đây thay x,a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm

Ví dụ II.1: Tính tổng $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-4C_n^4+...+(-1)^{n-1}nC_n^n$

Ví dụ II.1: Tính tổng $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n$

Giải

Ta thấy tổng cần tính có dạng như VP (1). Việc còn lại chỉ cần chọn $a = 1$, $x = -1$ ta tính được tổng bằng 0.

Cách khác: Sử dụng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta được tổng bằng :

$$nC_{n-1}^0 - nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 - nC_{n-1}^3 + ... + (-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$$

Dùng cách này có thể tránh được dùng đạo hàm do đó phù hợp với các bạn 11 chưa học đến đạo hàm hoặc cảm thấy dùng chưa quen đạo hàm.

Ví dụ II.2: Tính tổng

$$S = n2^{n-1}C_n^0 + (n-1)2^{n-2}.3.C_n^1 +$$

$$+(n-2)2^{n-3}.3^2.C_n^2 + ... + 3^{n-1}C_n^{n-1}$$

Giải

Nhận thấy hệ số đứng trước tổ hợp giảm dần $n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$ nên phải hoán đổi vị trí a và x:

$$(x+a)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}a + C_n^2x^{n-2}a^2 + ... + C_n^na^n$$

Đạo hàm theo x:

$$n(x+a)^{n-1} = nx^{n-1}C_n^0 + (n-1)x^{n-2}aC_n^1 +$$

$$+(n-2)x^{n-3}a^2C_n^2 + ... + a^{n-1}C_n^{n-1}$$

Thay x = 2, a = 3 ta được tổng bằng $n5^{n-1}$

Cách khác: Khéo léo sử dụng 2 đẳng thức $C_n^{n-k} = C_n^k$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta có thể tránh việc phải dùng đạo hàm phức tạm:

$$S = n2^{n-1}C_n^n + (n-1)2^{n-2}3C_n^{n-1} +$$

$$+(n-2)2^{n-3}3^2C_n^{n-2} + ... + 3^{n-1}C_n^1$$

$$= n2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + n2^{n-2}3C_{n-1}^{n-2} +$$

$$+n2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + ... + n3^{n-1}C_{n-1}^0$$

$$= n\left(2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + 2^{n-2}3C_{n-1}^{n-2} +\right.$$

$$\left.+2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + ... + 3^{n-1}C_{n-1}^0\right) =$$

$$= n(2+3)^{n-1} = n5^{n-1}$$

Ví dụ II.3: ***Tính tổng***

$$2008C_{2007}^0 + 2007C_{2007}^1 + 2006C_{2007}^2 + ... + 2C_{2007}^{2006} + C_{2007}^{2007}$$

Giải

Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008,2007,…2,1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu:

$$(x+1)^{2007} = C_{2007}^0 x^{2007} + C_{2007}^1 x^{2006} +$$

$$+C_{2007}^2 x^{2005} + ... + C_{2007}^{2006} x + C_{2007}^{2007}$$

Bây giờ nếu lấy đạo hàm thì chỉ được $2007C_{2007}^0 x^{2006}$ trong khi trong đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm x vào đẳng thức trên rồi mới đạo hàm:

$$x(x+1)^{2007} = C_{2007}^{0}x^{2008} + C_{2007}^{1}x^{2007} +$$

$$+C_{2007}^{2}x^{2006} + ... + C_{2007}^{2006}x^{2} + C_{2007}^{2007}x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^{2006}(2008x+1) = 2008C_{2007}^{0}x^{2007} +$$

$$+2007C_{2007}^{1}x^{2006} + ... + 2C_{2007}^{206}x + C_{2007}^{2007}$$

Thay x = 1 vào ta tìm được tổng là 2009.2^{2006}

Bài tập tương tự

1. Chứng minh rằng $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + ... + nC_n^n = n4^{n-1}$

2. Tính tổng $C_{30}^1 + 3.2^2 C_{30}^3 + 5.2^4 C_{30}^5 + ... + 27.2^{26} C_{30}^{27} + 29.2^{28} C_{30}^{29}$

3. Tìm n biết $2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + ... + (n+1)C_n^{n-1} + (n+2)C_n^n = 320$

2. Đạo hàm cấp 2

Dấu hiệu: Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng $1.2, 2.3, \ldots, (n-1).n$ hay $(n-1)n, \hat{a}, 2.3, 1.2$ hay 1^2 , 2^2 , … , n^2 (không kể dấu) tức có dạng $k(k-1)C_n^k a^{n-k}$ hay tổng quát hơn $k(k-1)C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức:

$$(a+bx)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1}bx + C_n^2 a^{n-2}b^2x^2 +$$

$$+C_n^3 a^{n-3}b^3x^3 + ... + C_n^n b^n x^n$$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$bn(a+bx)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1}b + 2C_n^2 a^{n-2}b^2x +$$

$$+3C_n^3 a^{n-3}b^3x^2 + ... + nC_n^n b^n x^{n-1}$$

Đạo hàm lần nữa:

$$b^2n(n-1)(a+bx)^{n-2} = 2.1C_n^2a^{n-2}b^2+$$

$$+3.2C_n^3a^{n-3}b^3x + ... + n(n-1)C_n^nb^nx^{n-2}(2)$$

Đến đây ta gần như giải quyết xong bài toán chỉ việc thay a, b, x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi.

Ví dụ II.4: ***Chứng minh rằng***

S = $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

Dễ dàng thấy được VT của đẳng thức trên giống gần như hoàn toàn VP (2) ta chỉ việc thay $a = b = x = 1$ là đã giải quyết xong bài toán

<u>Chú ý</u>: Đây chỉ là ý tưởng còn khi trình bày vào bài kiểm tra hay bài thi thì ta phải ghi rõ xét đa thức $(1+x)^n$ rồi đạo hàm 2 lần và thay x = 1 vào mới được trọn số điểm.

Cách khác: Ta vẫn có thể sử dụng được đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ 2 lần để tính tổng trên, cụ thể:

$$S = n1C_{n-1}^1 + n2C_{n-1}^2 + n3C_{n-1}^3 + ... + n(n-1)C_{n-1}^{n-1} =$$

$$= n(n-1)C_{n-2}^0 + n(n-1)C_{n-2}^1 + n(n-1)C_{n-2}^2 + ... + n(n-1)C_{n-2}^{n-2} =$$

$$= n(n-1)(1+1)^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}$$

Tương tự như trên ta dễ dàng tính được tổng bằng cách thay x = -1 và n = 16

$$1.2C_{16}^2 - 2.3C_{16}^3 + 3.4C_{16}^4 - ... - 14.15C_{16}^{15} + 15.16C_{16}^{16}$$

Hoặc ta cũng có thể sử dụng $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ để đơn giản hơn một chút.

Ví dụ II.5: ***Rút gọn tổng sau***

$$1^2C_{2009}^1 2^{2008} + 2^2C_{2009}^2 2^{2007} + 3^2C_{2009}^3 2^{2006} + ... + 2009^2C_{2009}^{2009}$$

Giải

Với ý tưởng như bài trên ta xét đa thức

$$(2+x)^{2009} = C_{2009}^0 2^{2009} + C_{2009}^1 2^{2008} x +$$

$$+C_{2009}^2 2^{2007} x^2 + C_{2009}^3 2^{2006} x^3 + ... + C_{2009}^{2009} x^{2009}$$

Đạo hàm lần 1:

$$2.2009(2+x)^{2008} = 1C_{2009}^1 2^{2008} + 2C_{2009}^2 2^{2007} x +$$

$$+3C_{2009}^3 2^{2006} x^2 + ... + 2009C_{2009}^{2009} x^{2008}$$

Nếu ta tiếp tục đạo hàm lần nữa thì chỉ thu được 1.2, 2.3 ,… do đó để

thu được 2^2 , 3^2 ta phải nhân thêm hai vế với x rồi mới lấy đạo hàm:

$$2009x(2+x)^{2008} = 1C_{2009}^1 2^{2008} x +$$

$$+2C_{2009}^2 2^{2007} x^2 + ... + 2009C_{2009}^{2009} x^{2009}$$

$$2009(2+x)^{2008} + 2009.2008x(2+x)^{2007} = 1^2C_{2009}^1 2^{2008} +$$

$$+2^2C_{2009}^2 2^{2007} x + ... + 2009^2C_{2009}^{2009} x^{2008}$$

Thay x = 1 ta rút gọn được tổng trên thành $2011.2009.3^{2007}$

Tương tự khi tính tổng $2.1C_n^1 + 3.2C_n^2 + 4.3C_n^3 + ... + (n+1)nC_n^n$ ta cần chú ý là trước tổ hợp có một hệ số lớn hơn k trong C_n^k nên ta phải nhân với x trước khi đạo hàm 2 lần.

Bài tập tương tự:

1. Tính tổng

$$2.1C_n^2 3^{n-2}2^2 - 3.2C_n^3 3^{n-3}2^3 + 4.3C_n^4 3^{n-4}2^4 + ... + (-1)^n n(n-1)C_n^n 2^n$$

III. Sử dụng tích phân xác định

Dấu hiệu: Ý tưởng của phương pháp này là dựa vào hệ thức

$$\int_a^b x^k dx = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\Big|_a^b = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1}$$

Từ đây dễ dàng tìm được dấu hiệu để sử dụng phương pháp này là số hạng của tổng có dạng $\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1}C_n^k$. Cụ thể, xét tích phân $I = \int_a^b (c + dx)^n dx$ ta có thể tính bằng hai cách.

Tính trực tiếp: $I = \frac{1}{d}\int_a^b (c+dx)^n d(c+dx) = \frac{1}{d}\left(\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_a^b$

Hoặc gián tiếp:

$$I = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n C_n^k c^{n-k} d^k x^k\right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k c^{n-k} d^k \int_a^b x^k dx \right) = \sum_{k=0}^{n} \left[C_n^k c^{n-k} d^k \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Bigg|_a^b \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} C_n^k c^{n-k} d^k \right)$$

Hai cách trên là như nhau nên từ đó ta có được:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{k+1} C_n^k c^{n-k} d^k \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_a^b$$

Tùy bài toán ta chọn các hệ số a, b, c, d, thích hợp

Ví dụ III.1: *CMR*

$$2C_n^0 + \frac{2^2}{2} C_n^1 + \frac{2^3}{3} C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1} \, (III.1)$$

Giải

Nhìn vào tử của phân số dễ dàng tìm được hai cận $a = 0 \, , \, b = 2$.

Tiếp tục để ý một chút ta chọn tiếp $c = d = 1$ suy ra đpcm

__Chú ý:__ Khi trình bày bài thi phải ghi rõ tích phân $\int_0^2 (1+x)^n dx$

rồi tính bằng hai cách mới được trọn điểm.

Cách khác: Ta có thể tránh không dùng tích phân bằng cách áp dụng đẳng thức: $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$. Việc tính toán không những đơn giản hơn mà còn giảm thiểu được sai sót khi làm bài:

$$VT(III.1) = \frac{1}{n+1}\left(2C_{n+1}^1 + 2^2C_{n+1}^2 + 2^3C_{n+1}^3 + ... + 2^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)$$

$$= \frac{(1+2)^{n+1} - 1}{n+1}$$

Để thấy rõ sự hữu ích của đẳng thức đơn giản đó, ta xét một ví dụ khác. Tính tổng

$$S = \left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2 + \left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2 + \left(\frac{C_n^3}{3}\right)^2 + ... + \left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2$$

Rõ ràng dùng tích phân đối với bài này gần như là không thể nhưng nếu áp dụng đẳng thức đó thì lại là một chuyện khác:

$$S = \frac{1}{(n+1)^2}\left[\left(C_{n+1}^1\right)^2 + \left(C_{n+1}^2\right)^2 + \left(C_{n+1}^3\right)^2 + ... + \left(C_{n+1}^{n+1}\right)^2\right]$$

Việc còn lại bây giờ chỉ là tính tổng trong ngoặc vuông đó. Có rất nhiều cách để tính nên chúng ta sẽ quay lại tổng này trong phần " Các phương pháp khác ".

Trở lại phần tích phân, với việc thay a, b, c, d bằng cách hằng số thích hợp ta có thể "chế" ra các bài toán phức tạp hơn, chẳng hạn khi $a = 2, b = -3, c = 1, d = -1$ ta có:

$$\frac{2+3}{1}C_{2009}^{1}-\frac{2^2-3^2}{2}C_{2009}^{2}+$$

$$+\frac{2^3+3^3}{3}C_{2009}^{3}-...-\frac{2^{2010}-3^{2010}}{2010}C_{2009}^{2009}=\frac{1-4^{2010}}{2010}$$

Ví dụ III.2: ***Tính***

$$\frac{2^2-1}{2}C_n^0+\frac{2^3-1}{3}C_n^1+\frac{2^4-1}{4}C_n^2+...+\frac{2^{n+2}-1}{n+2}C_n^n$$

Giải

Mỗi số hạng của tổng có dạng $\frac{2^{k+2}-1}{k+2}C_n^k$ nên ta nghĩ ngay đến dùng tích phân. Nhưng mẫu của hệ số lại là $k+2$ so với trong dấu hiệu ở trên là $k+1$. Do đó ta phải thay tích phân $\int_a^b (1+x)^n dx$ bằng tích phân khác. Ở đây ta chọn $I=\int_a^b x(1+x)^n dx$.

Dễ dàng tìm được cận trên là 2, cận dưới là 1. Thử lại:

$$I=\int_1^2\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{k+1}\right)dx=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\int_1^2 x^{k+1}dx\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+2}-1}{k+2}C_n^k\right)$$

Việc còn lại bây giờ chỉ là đi tính trực tiếp I:

$$I=\int_1^2 (x+1-1)(1+x)^n dx=\int_1^2 \left[(1+x)^{n+1}-(1+x)^n\right]dx$$

$$=\left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}-\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_1^2$$

Với ý tưởng đó ta xét tổng sau:

$$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n$$

Mẫu của hệ số trước tổ hợp giờ đây không còn mẫu mực nữa mà "nhảy cóc" $2,4,6,...,2n+2$ và để ý mỗi số hạng có dạng $\frac{C_n^k}{2k+2}$ nên số hạng ban đầu của nó trước khi lấy nguyên hàm là $C_n^k x^{2k+1}$ hay $C_n^k (x^2)^k.x$ đến đây phần nào ta đã đoán ra được tích phân ban đầu là $\int x(1+x^2)^n dx$. Nhưng như vậy thì dấu trừ ở đâu ra ?

Tinh ý một chút ta sửa lại được: $\int x(1-x^2)^n dx$. Việc thay cận đơn giản hơn, ở đây ta chọn cận trên là 1, cận dưới là 0. Thử lại tí chút:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k x^{2k+1}\right)dx=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k(-1)^k\int_0^1 x^{2k+1}dx\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{C_n^k(-1)^k}{2k+2}\right)$$

Phần còn lại của bài toán là tính tích phân đó:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = \frac{-1}{2}\left(\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right)_0^1$$

Với việc thay đổi tích phân ta có thể làm ra tỉ tỉ các tổng khác phức tạp hơn ^^!. Ví dụ

$$\int_1^3 x^3(1-x)^n dx, \int_0^2 x^2(2-x^3)^n dx, \int_{-1}^0 (x+1)(1-x^2)^n dx ...$$

Một số bài tương tự:

1. Tính tổng bằng hai cách:

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} ... + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$$

(HD: tương tự ví dụ III.1)

2. Tính tổng bằng hai cách:

$$2C_n^0 + \frac{1}{2}2^2C_n^1 + \frac{1}{3}2^3C_n^2 + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{1-(-1)^n}{n+1}$$

(HD: tương tự ví dụ III.1)

3. Chứng minh rằng

$$\frac{C_n^0}{3} + \frac{C_n^1}{4} + \frac{C_n^2}{4} + ... + \frac{C_n^n}{n+3} = \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n-1)(n+2)(n+3)}$$

(HD: tương tự ví dụ III.2)

4. Chứng minh rằng

$$\frac{C_n^0}{3}+\frac{C_n^1}{6}+\frac{C_n^2}{9}+...+\frac{C_n^n}{3(n+1)}=\frac{2^{n-1}-1}{3(n+1)}$$

(HD: tương tự ví dụ III.2)

IV. Công cụ số phức

Ý tưởng của phương pháp này là dựa tính chất đặc biệt của i:

$i^{4k}=1\ ,\ i^{4k+1}=i\ ,\ i^{4k+2}=-1\ ,\ i^{4k+3}=-i$ với $k\in N$

Từ đó, ta xét đa thức

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$

Đặt $S_0=\sum\limits_{i=4k}a_i, S_1=\sum\limits_{i=4k+1}a_i, S_2=\sum\limits_{i=4k+2}a_i, S_3=\sum\limits_{i=4k+3}a_i$. Ta có:

$$\begin{cases} f(1)=(S_0+S_2)+(S_1+S_3) \\ f(-1)=(S_0+S_2)-(S_1+S_3) \\ f(i)=(S_0-S_2)+(S_1-S_3)i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} S_0+S_2=\frac{f(1)+f(-1)}{2} \\ S_1+S_3=\frac{f(1)-f(-1)}{2} \\ S_0-S_2=Re(f(i)) \\ S_1-S_3=Im(f(i)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} S_0 = \frac{f(1)+f(-1)+2\,\mathrm{Re}(f(i))}{4} & (1) \\ S_1 = \frac{f(1)-f(-1)+2\,\mathrm{Im}(f(i))}{4} & (2) \\ S_2 = \frac{f(1)+f(-1)-2\,\mathrm{Re}(f(i))}{4} & (3) \\ S_3 = \frac{f(1)-f(-1)-2\,\mathrm{Im}(f(i))}{4} & (4) \end{cases}$$

Với $\mathrm{Re}(f(i)),\ \mathrm{Im}(f(i))$ lần lượt là phần thực và phần ảo của $f(i)$.

Ví dụ IV.1: ***Rút gọn*** $T_1 = C_{4n}^0 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - ... + C_{4n}^{4n}$.

Giải

Rõ ràng $S_1 = S_0 - S_2$ trong đa thức $f(x) = (1+x)^{4n}$. Mặt khác ta có $f(i) = (S_0 - S_2) + (S_1 - S_3)i$ nên công việc bây giờ chỉ là đi tính $f(i)$ và phần thực của nó chính là tổng T_1 cần tìm: $f(i) = (1+i)^{4n} = \left[(1+i)^2\right]^{2n} = (2i)^{2n} = 4^n(-1)^n$.

Ta cũng có thể sử dụng (1), (3) ta đã tìm ra ở trên để giải nhưng mất công giải lại hệ phương trình 4 ẩn đó và như thế thì thật là giết ruồi mà lại dùng đến dao mổ trâu ^^!

Tương tự ta tính được tổng $C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - ... + C_{4n}^{4n-1} = 0$

Ví dụ IV.2: Tính $T_2 = 1C_{8n}^1 - 3C_{8n}^3 + ... - (8n-1)C_{8n}^{8n-1}$

Giải

Trước tiên ta phải dùng đạo hàm để có được hệ số đứng trước tổ hợp. Xét đa thức:

$$f(x) = (1+x)^{8n} = C_{8n}^0 + \sum_{k=1}^{8n} C_n^k x^k \Rightarrow$$

$'(x) = 8n(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} kC_n^k x^{k-1}$

Lại nhân với x ta được $g(x) = 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} kC_n^k x^k$

Nhận thấy T_2chính là phần ảo của $g(i)$.$g(i) = 8ni(1+i)^{8n-1} = 4n.16^n + 4n.16^n i$

Do đó $T_2 = 4n.16^n$

Tương tự ta dùng đạo hàm 2 lần để tính tổng:

$2^2C_{8n}^2 - 4^2C_{8n}^4 + 6^2C_{8n}^6 - ... - (8n)^2C_{8n}^{8n}$:

Giải:

Ta có:

$$(1+x)^{8n} = C_{8n}^0 + \sum_{k=1}^{8n} C_{8n}^k x^k \Rightarrow 8n(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=1}^{8n} kC_{8n}^k x^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=1}^{8n} kC_{8n}^k x^k$$

$$\Rightarrow 8n(1+x)^{8n-2}(1+8nx) = \sum_{k=1}^{8n} k^2C_{8n}^k x^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 8nx(1+x)^{8n-2}(1+8nx) = \sum_{k=1}^{8n} k^2C_{8n}^k x^k = f(x)$$

Tổng cần tính là phần thực của: $f(i) = 8ni(1+i)^{8n-2}(1+8ni) = 16^{n-1}n + 128n^2.16^{n-2}i$

Bài tập tương tự:

Cho khai triển $(x^2+3x+1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{20}x^{20}$***. Tính tổng***

a. $T_1 = a_0 + a_4 + a_8 + ... + a_{20}$ b. $T_2 = a_1 + a_5 + a_9 + ... + a_{17}$

c. $T_3 = a_0 + a_1 + a_4 + a_5 + ... + a_{16} + a_{17}$ d. $T_4 = a_2 - a_3 + a_6 - a_7 + ... + a_{18} - a_{19}$