Bài giảng số 9

XÁC SUẤT

Mặc dù bài toán về xác suất chưa hề có mặt trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng trong các năm từ 2002 - 2009, nhưng kể từ năm 2009 các bài toán về xác suất là một trong các chủ đề có mặt trong chương trình thi môn Toán trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng do Bộ Giáo dục và Đạo tạo quy định (nó được quy định là một trong các nội dung ra thi ở câu số 7 của đề thi). Vì lẽ đó có nhiều khả năng các bài toán về xác suất sẽ có mặt trong các đề thi môn Toán vào các trường Đại học và Cao đẳng trong những mùa thi tới.

Bài giảng này đề cập đến các bài toán tìm xác suất của một biến cố ngẫu nhiên theo hai phương pháp chính:

- Tìm xác suất của một biến cố nhờ định nghĩa về xác suất.
- Tìm xác xuất của một biến cố dựa vào các phép tính cơ bản của lí thuyết xác suất

§1. TÌM XÁC SUẤT CỦA MỘT BIẾN CỐ NHỜ ĐỊNH NGHĨA VỀ XÁC SUẤT

Đây là một trong hai phương pháp để tìm xác suất của một biến cố ngẫu nhiên.

Để sử dụng được phương pháp đơn giản này ta cần tính hai đại lượng sau :

1/ $|\Omega|$ là số lượng các phần tử của không gian mẫu.

2/ $|\Omega_A|$ là số lượng các phần tử của tập hợp các khả năng thuận lợi của biến cố.

Khi đó xác suất của biến ngẫu nhiên A là: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$.

Chú ý rằng việc tính hai đại lượng trên thực chất là giải hai bài toán về các phép đếm – bài toán quan trọng của lí thuyết của các bài toán tổ hợp (xem bài giảng 11).

Thí dụ 1:

Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 viên bi. Tính xác suất trong hai trường hợp sau:

1/ Lấy được 3 viên bi màu xanh.

2/ Lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh.

Giải

Gọi Ω là tập hợp tất cả các cách lấy ra 3 viên bi trong số 12 viên bi. Ta có:

$$|\Omega| = C_{12}^3 = 220.$$

1/ Gọi A là biến cố "lấy được 3 viên bi màu xanh". Do có 5 viên bi màu xanh nên ta có:

$$|\Omega_A| = C_5^3 = 10.$$

Vậy theo định nghĩa của xác suất, ta có:

$$P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}.$$

2/ Gọi B là biến cố "lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh"

Để lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh ta có hai cách:

- Hoặc lấy ra cả 3 viên bi xanh. Theo câu 1 số cách lấy ra là $C_5^3=10$.
- Hoặc lấy ra 2 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ. Theo quy tắc nhân ta có số cách lấy ra là: $C_5^2.C_7^1=10.7=70$.

Theo quy tắc cộng ta có: $|\Omega_B|=70+10=80$.

Theo định nghĩa của xác suất ta có:

$$P(B)=\frac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\frac{80}{220}=\frac{4}{11}.$$

Thí dụ 2:

Trong 100 vé xổ số có 1 vé trúng 100000đ, 5 vé trúng 50000đ, và 10 vé trúng 10000đ. Một người mua ngẫu nhiên ba vé.

1/ Tìm xác suất để người mua trúng thưởng 30000đ.

2/ Tìm xác suất để người mua trúng thưởng 200000đ.

Giải

Gọi Ω là tập hợp tất cả các cách mua 3 vé trong 100 vé. Ta có:

$$|\Omega|=C_{100}^3.$$

1/ Gọi A là biến cố "người mua trúng thưởng 30000đ"

Để trúng thưởng 30000đ, thì cả ba vé đều trúng thưởng và mỗi vé trúng thưởng 10000đ. Do đó:

$$|\Omega_A|=C_{10}^3.$$

Theo định nghĩa của xác suất, thì: $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{C_{10}^3}{C_{100}^3}=\frac{2}{2695}$.

2/ Gọi B là biến cố "người mua trúng thưởng 200000đ"

Để trúng thưởng 200000đ thì do chỉ có 1 vé trúng 100000đ nên cả 3 vé người mua đều trúng thưởng, trong đó 1 vé trúng thưởng 100000đ và 2 vé trúng mỗi vé 50000đ. Theo quy tắc nhân ta có:

$$|\Omega_B|=C_1^1.C_5^2=10.$$

Từ đó: $P(B)=\frac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\frac{10}{C_{100}^3}=\frac{1}{156200}$.

Thí dụ 3

1/ Gieo đồng thời hai con xúc sắc. Tính xác suất để:

a/ Tổng số chấm xuất hiện trên hai con là 9.

b/ Số chấm xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2.

2/ Gieo đồng thời ba con xúc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên ba con là 10.

Giải

1/ Gọi Ω là tập hợp tất cả các khả năng xảy ra. Ở đây có hai con xúc sắc, mỗi con có 6 khả năng xuất hiện, vậy $|\Omega| = 6.6=36$.

a/ Gọi A là biến cố "tổng các chấm xuất hiện trên 2 con là 9". Các khả năng thuận lợi là: (3;6), (4;5), (6;3), (5;4). Vậy $|\Omega_A| = 4$.

Từ đó:

$$P(A) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

b/ Gọi B là biến cố "tổng số chấm xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2". Các khả năng thuận lợi là: (1;3), (2;4), (3;5), (4;6), (3;1), (4;2), (6;4). Vậy

$$|\Omega_B| = 8.$$

Từ đó: $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

2/ Gọi Ω là tập hợp tất cả các khả năng xảy ra. Lập luận như trong phần 1/ ta có: $|\Omega| = 6.6.6=216$.

Gọi C là biến cố "tổng số chấm xuất hiện trên ba con là 10". Các khả năng thuận lợi của C chính là tổ hợp có tổng bằng 10 sau đây:

(1;3;6), (1;4;5), (2;2;6), (2;3;5), (3;3;4) và các hoán vị có thể của các tổ hợp ấy. Do vậy

$$|\Omega| = 6 + 6 + 3 + 6 + 3 = 24.$$

(Để ý rằng (1;3;6), (1;4;5), (2;3;5) mỗi cái có 6 hoán vị nhưng (2;2;6) và (3;3;4) mỗi cái chỉ có ba hoán vị).

Từ đó suy ra:

$$P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}.$$

Nhận xét

Trong thí dụ trên, để tính $|\Omega_A|$, $|\Omega_B|$,$|\Omega_C|$ ta đã sử dụng phép liệt kê các phần tử của tập hợp.

Thí dụ 4 :

Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 10. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

Giải

Gọi Ω là tập hợp tất cả các cách chọn 2 tấm thẻ trong số 9 tấm thẻ. Ta có:

$$|\Omega| = C_9^2 = 36.$$

Gọi A là biến cố "tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn".

Có hai cách chọn thỏa mãn yêu cầu trên.

- Hoặc là cả hai tấm thẻ mang số chẵn. Vì có 4 số chẵn trong khoảng từ 1 đến 9, nên số cách chọn ở khả năng này là:

$$C_4^2 = 6.$$

- Hoặc là chọn một tấm thẻ mang số chẵn, một tấm thẻ mang số lẻ. Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$C_4^1.C_5^1 = 20.$$

Từ đó theo quy tắc cộng ta có:

$$|\Omega_A| = 6+20 = 26.$$

Theo định nghĩa xác suất suy ra:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

Thí dụ 5

Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Giải

Gọi Ω là tập hợp các cách chọn 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ. Ta có

$$|\Omega| = C_{30}^{10}.$$

Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số chẵn, 15 tấm thẻ mang số lẻ, 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Gọi A là biến cố "có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ chia hết cho 10".

Để tính A ta làm như sau: Đầu tiên chọn 5 tấm trong 15 tấm mang số lẻ, chọn 4 tấm trong 12 tấm mang số chẵn nhưng không chia hết cho 10, sau cùng chọn 1 trong 3 tấm mang số chia hết cho 10. Theo quy tắc nhân, ta có:

$$|\Omega_A| = C_{15}^5 C_{12}^4 C_3^1.$$

Vậy: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{15}^5.C_{12}^4.C_3^1}{C_{30}^{10}} = \frac{99}{667}.$

Thí dụ 6:

Một đoàn tàu có 4 toa đỗ ở sân ga. Có 4 hành khách từ sân ga lên tàu, mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa.

1/ Tìm xác suất để mỗi toa có đúng 1 người lên tàu.

2/ Tìm xác suất để 1 toa có 3 người, một toa có 1 người và hai toa không có người.

Giải

Xét dãy số (x_1, x_2, x_3, x_4), trong đó x_i chỉ số toa mà người i lên tàu.

(thí dụ dãy 2, 1, 2, 3) chỉ rằng người thứ 1 lên toa số 2, người thứ hai lên toa số 1, người thứ ba lên toa số 2, người thứ tư lên toa số 3).

Gọi Ω là tập hợp tất cả các dãy (x_1, x_2, x_3, x_4) (tức là tập hợp tất cả các khả năng lên tàu của 4 hành khách).

Do mỗi $x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tức là mỗi x_i đều có 4 khả năng lựa chọn, vậy

$$|\Omega| = 4^4 = 256.$$

1/ Gọi A là biến cố "mỗi toa tàu có đúng 1 người lên tàu". Để ý rằng một cách khách lên tàu tương ứng một – một với cách chọn dãy (x_1, x_2, x_3, x_4), trong đó x_i, x_j đôi một khác nhau. Số dãy như vậy là 4!, như vậy:

$$|\Omega_A| = 4! = 24.$$

Từ đó: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}.$

2/ Gọi B là biến cố " có 1 toa tàu có 3 người lên, 1 toa có 1 người lên, 2 toa không có người". Để tính $|\Omega_B|$ ta sử dụng quy tắc nhân như sau:

- Chọn 1 toa trong 4 toa để có 3 khách lên, số cách chọn: $n_1 = C_4^1 = 4$.

- Chọn 1 toa còn lại trong 3 toa để có 1 khách lên, số cách chọn: $n_2 = C_3^1 = 3$.

- Với toa có 3 khách lên chọn 3 khách trong 4 khách ngồi toa đó: Số cách chọn $n_3 = C_4^3 = 4$.

- Người còn lại cho vào toa có 1 khách, số cách chọn $n_4 = 1$.

Theo quy tắc nhân ta có:

$$|\Omega_B| = n_1 n_2 n_3 n_4 = 48.$$

Từ đó: $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{48}{256} = \dfrac{3}{16}$.

Thí dụ 7:

Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có một lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

Giải

Xét các dãy số (x_1, x_2, x_3), trong đó (x_1, x_2, x_3) là một hoán vị của ba số 1, 2, 3, ở đây $x_i = i$ tức là lá thư thứ i đã bỏ đúng địa chỉ.

Gọi Ω là tập hợp tất cả các khả năng bỏ 3 lá thứ vào 3 phong bì. Ta có ngay:

$$|\Omega| = 3! = 6.$$

Gọi A là biến cố "có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì". Các khả năng thuận lợi của A là: (1,2,3); (1,3,2); (3,2,1); (2,1,3).

Vậy $|\Omega| = 4$.

Từ đó $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Nhận xét:

Ở đây ta đã sử dụng phương pháp liệt kê mọi phần tử của Ω_A để tính $|\Omega_A|$.

§2. TÌM XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ BẰNG CÁCH SỬ DỤNG CÁC PHÉP TÍNH XÁC SUẤT

Để giải các bài toán bằng phương pháp sử dụng các phép tính xác suất ngoài việc dùng định nghĩa của xác suất, chúng ta còn phải sử dụng thành thạo các quy tắc cộng xác suất, nhân xác suất và xác suất của biến cố đối.

Thí dụ 1

Gieo một cặp hai con xúc sắc 10 lần. Tìm xác suất để ít nhất có 1 lần có hai con đều ra mặt "ngũ".

Giải

Gọi A_i là biến cố "lần thứ i không xuất hiện hai con xúc sắc ra mặt ngũ". Dễ thấy theo quy tắc nhân

$$P(A_i) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}; \quad i = \overline{1,10}.$$

Vậy biến cố $\overline{A_i}$ Lần thứ i không xuất hiện có hai con ra mặt "ngũ" có xác suất:

$$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Gọi A là biến cố "Có ít nhất một lần có hai mặt ngũ thì $\overline{A}$ là biến cố "cả 10 lần, không có lần nào có hai con ra mặt ngũ"

Ta có: $\overline{A} = \overline{A_1}.\overline{A_2}.....\overline{A_{10}}$

Theo quy tắc nhân xác suất (để ý rằng $\overline{A_1},...,\overline{A_{10}}$ là các biến cố độc lập với nhau) thì

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_{10}}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{10}.$$

Vậy theo công thức tính xác suất của biến cố đối, thì

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10}.$$

Thí dụ 2:

Một sọt cam rất lớn được phân loại theo cách sau: Chọn ngẫu nhiên 20 quả cam làm mẫu đại diện. Nếu mẫu không có quả cam hỏng nào thì sọt cam được xếp loại 1; nếu mẫu có 1 hoặc 2 quả cam hỏng thì sọt cam được xếp loại 2, còn lại được xếp loại 3. Giả sử tỉ lệ cam hỏng là 3%. Hãy tính xác suất để:

1/ Sọt cam được xếp loại 1.

2/ Sọt cam được xếp loại 2.

3/ Sọt cam được xếp loại 3.

Giải

Tỉ lệ cam hỏng là 3%, tức là xác suất lấy ra quả cam hỏng là 0,03; còn xác suất lấy ra 1 quả cam tốt là 0,97.

1/ Giả thiết sọt cam rất lớn có nghĩa là phép lấy các quả cam ra là các biến cố độc lập.

Gọi A là biến cố "sọt cam xếp loại 1". Theo quy tắc nhân, ta có:

$$P(A) = (0,97)^{20}.$$

2/ Gọi B là biến cố "sọt cam xếp loại 2"

Gọi B_1 là biến cố "trong 20 quả cam lấy ra một quả cam hỏng"

Gọi B_2 là biến cố "trong 20 quả cam lấy ra hai quả cam hỏng".

Khi đó $B = B_1 \cup B_2$, trong đó B_1, B_2 là hai biến cố xung khắc. Theo quy tắc cộng xác suất ta có:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2). \quad (1)$$

Trong 20 quả cam lấy ra có 1 quả hỏng, tức là có 1 lần lấy ra quả cam hỏng và 19 lần lấy ra quả cam tốt; 20 quả cam hỏng có thể lấy ra theo C_{20}^1 cách. Vậy theo quy tắc nhân ta có:

$$P(B_1) = C_{20}^1(0,03)(0,97)^{19}. \quad (2)$$

Tương tự ta có:

$$P(B_2) = C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18}. \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) ta có:

$$P(B) = C_{20}^1 (0,03)(0,97)^{19} + C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18}.$$

3/ Gọi C là biến cố "sọt cam xếp loại 3", thì C là biến cố đối của biến cố $A \cup B$ vậy $P(C) = 1 - P(A \cup B)$ (4)

Do A, B là hai biến cố xung khắc, nên theo quy tắc cộng, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta có :

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B)$$

$$= 1 - (0,57)^{20} - C_{20}^1 (0,03)(0,97)^{19} + C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18}$$

Nhận xét:

Trong thí dụ trên ta đã sử dụng xen kẽ quy tắc cộng, quy tắc nhân xác suất và quy tắc tính xác suất của biến cố đối.

Thí dụ 3:

Một máy bay có 5 động cơ, trong đó 3 động cơ ở cánh phải và 2 động cơ ở cánh trái. Mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,1. Còn mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,05, các động cơ hoạt động độc lập. Tìm xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn trong các trường hợp sau đây:

1/ Máy bay chỉ bay được nếu có ít nhất 3 động cơ làm việc.

2/ Máy bay chỉ bay được nếu trên mỗi cánh của máy bay có ít nhất một động cơ làm việc.

Giải

1/ Xét trường hợp máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu như có ít nhất hai động cơ làm việc.

Gọi A là biến cố "máy bay thực hiện chuyến bay an toàn", thì biến cố $\overline{A}$ là máy bay bay không an toàn. Theo quy tắc biến cố đối, ta có:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \qquad (1)$$

Máy bay không an toàn nếu:

- Hoặc là cả 5 động cơ bị hỏng. Theo quy tắc nhân xác suất để điều này xảy ra với xác suất:

$$(0,1)^3(0,05)^2.$$

- Hoặc là chỉ có một động cơ ở cánh phải làm việc, còn lại mọi động cơ bị hỏng. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất điều này xảy ra với xác suất.

$$C_3^1 (0,05)(0,95)(0,1)^3.$$

Theo quy tắc cộng xác suất ta có:

$$P(\overline{A}) = (0,1)^3 (0,05)^2 + C_3^1 (0,1)^2 (0,9)(0,05)^2 + C_2^1 (0,05)(0,95)(0,1)^3$$

$$= 0,00016. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$P(A) = 1 - 0,00016 = 0,99984.$$

2/ Xét trường hợp máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu như ở mỗi cánh ít nhất có 1 động cơ hoạt động. Gọi B là biến cố "máy bay thực hiện chuyến bay an toàn", thì

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}). \qquad (3)$$

Máy bay bay không an toàn nếu:

- Hoặc là cả ba động cơ bên phải bị hỏng. Điều này xảy ra có xác suất $(0,1)^3$.
- Hoặc là cả hai động cơ bên trái bị hỏng. Điều này xảy ra với xác suất $(0,05)^2$.

Theo quy tắc cộng ta có: $P(\overline{B}) = (0,1)^3 + (0,05)^2 = 0,0035$. (4)

Thay (4) vào (3) ta có P(B) = 1 – 0,0035 = 0,9965.

Nhận xét:

Qua thí dụ này ta thấy rõ vai trò của phương pháp tính P(A) qua $P(\overline{A})$ (sử dụng xác suất của biến cố đối).

Thí dụ 4:

Một vận động viên bắn súng, bắn ba viên đạn. Xác suất để trúng cả ba viên vòng 10 là 0,0008, xác suất để 1 viên trúng vòng 8 là 0,15 và xác suất để 1 viên trúng vòng dưới 8 là 0,4. Biết rằng các lần bắn là độc lập với nhau. Tìm xác suất để vận động viên đạt ít nhất 28 điểm.

Giải

Gọi A là biến cố "1 viên trúng vòng 10" Khi đó từ giả thiết, ta có:

$$0,0008 = (P(A))^3 \Rightarrow P(A) = 0,2. \ (1)$$

Gọi B là biến cố "1 viên trúng vòng 9"

C là biến cố "1 viên trúng vòng 8" và D là biến cố "1 viên trúng vòng dưới 8". Theo giả thiết ta có: P(C) = 0,15; P(D) = 0,4. (2).

Rõ ràng A, B, C, D là 4 biến cố đôi một xung khắc với nhau, nên ta có:

$$1 = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) .(3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra P(B) = 1 – (0,2+0,15+0,4) = 0,25. (4).

Gọi X là biến cố "vận động viên đạt ít nhất 28 điểm".

Để đạt ít nhất 28 điểm thì:

- Hoặc là 2 viên trúng vòng 10; 1 viên trúng vòng 8. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, điều này xảy ra với xác suất $C_3^2(0,2)^2(0,15)$.
- Hoặc là hai viên trúng vòng 9; 1 viên trúng vòng 10. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, điều này xảy ra với xác suất $C_3^2(0,25)^2(0,2)$.
- Hoặc là hai viên trúng vòng 10, 1 viên trúng vòng 9. Ta có điều này xảy ra với xác suất

$$C_3^2(0,2)^2(0,25).$$

- Hoặc cả ba viên trúng vòng 10 với xác suất theo giả thiết 0,008.

Theo quy tắc cộng xác suất của các biến cố xung khắc, ta có:

$$P(X) = C_3^2(0,2)^2(0,15) + C_3^2(0,25)^2(0,2) + C_3^2(0,2)^2(0,25) + 0,008$$

$$= 0,018 + 0,0357 + 0,03 + 0,008 = 0,0935.$$

Vậy vận động viên bắn súng đạt ít nhất 28 điểm với xác suất là 0,0935.

Nhận xét:

Đây là một thí dụ thuần túy sử dụng quy tắc cộng và nhân xác suất.

Thí dụ 5:

Trong 1 lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất bị cháy là $\frac{1}{4}$. Lớp học đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng đèn sáng. Tìm xác suất để lớp học có đủ ánh sáng.

Giải

Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố "lớp có 6 bóng đèn sáng", "lớp có 5 bóng đèn sáng" và "lớp có 4 bóng đèn sáng".

Mỗi bóng có xác suất sáng là $\frac{3}{4}$. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, ta có:

$$P(A)=\left(\frac{3}{4}\right)^6;P(B)=C_6^5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(C)=C_6^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Gọi X là biến cố "lớp học đủ ánh sáng". Ta có:

$$P(X)=P(A)+P(B)+P(C)=0,8305.$$

Thí dụ 6:

Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 5 phương án trả lời, nhưng chỉ có 1 phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hú họa một câu trả lời. Tìm xác suất để:

1/ Học sinh đó được 13 điểm

2/ Học sinh đó bị điểm âm.

Giải

1/Gọi x là số câu trả lời đúng, 12–x là số câu trả lời sai.

Để được 13 điểm ta cần có:

$$4x-(12-x)=13$$
$$\Leftrightarrow x=5.$$

Bài toán trở thành: Tìm xác suất để học sinh đó có 5 câu trả lời đúng.

Xác suất để có câu trả lời đúng là $\frac{1}{5}$ (và sai là $\frac{4}{5}$). Theo quy tắc cộng và nhân xác suất để học sinh đó được 13 điểm là:

$$P=C_{12}^5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^7\approx 0,0532.$$

2/ Anh ta bị điểm âm khi

$$4x-(12-x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{12}{5} \Leftrightarrow x=0,1,2 \text{ (do x nguyên)}.$$

Gọi A là biến cố "trả lời sai toàn bộ", B là biến cố "trả lời đúng 1 câu", C là biến cố "trả lời đúng 2 câu". Lập luận như phần 1/ ta có:

$$P(A)=\left(\frac{4}{5}\right)^{12}\approx 0,0687;\ P(B)=C_{12}^{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\approx 0,2064;$$

$$P(C)=C_{12}^{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\approx 0,2835.$$

Gọi X là biến cố "bị điểm âm", thì $X = A \cup B \cup C$, trong đó rõ ràng A, B, C là các biến cố đôi một xung khắc. Theo quy tắc cộng xác suất, ta có:

$$P(X) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,5583.$$

Thí dụ 7:

Một người say rượu bước 8 bước. Mỗi bước anh ta tiến lên phía trước 1m hoặc lùi lại phía sau 1m với xác suất như nhau. Tìm xác suất để

1/ Anh ta trở lại điểm xuất phát.

2/ Anh ta cách điểm xuất phát hơn 4m.

Giải

1/ Anh ta quay lại điểm xuất phát nếu như trong 8 bước có 4 bước tiến, 4 bước lùi. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, xác suất xảy ra trong trường hợp này là:

$$P=C_{8}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=C_{8}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}=\frac{70}{256}.$$

2/ Gọi x là số bước tiến lên và 8–x sẽ là số bước lùi. Khoảng cách giữa anh say rượu và điểm xuất phát là:

$$|x-(8-x)| = |2x-8|$$

Từ đó theo giả thiết ta có:

$$|2x-8|>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6 \\ x<2 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = 0;1;7;8$ (do x nguyên)

Vì thế áp dụng các quy tắc cộng và nhân xác suất, thì xác suất trong trường hợp này là:

$$P=C_{8}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}+C_{8}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)+C_{8}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{7}+C_{8}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}=\frac{9}{128}$$

Nhận xét:

Qua 7 thí dụ trên các bạn đã thấy rõ tính hiệu quả của phương pháp sử dụng "các định lí về phép tính xác suất" để tìm xác suất của một biến cố.

Thí dụ 8: (Thí dụ sử dụng công thức "Cộng suy rộng"

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(AB).$$

Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số. Tìm xác suất để số của vé ấy không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.

Giải

Gọi A là biến cố "vé không có chữ số 1". Ta có ngay theo định nghĩa của xác suất và quy tắc nhân xác suất.

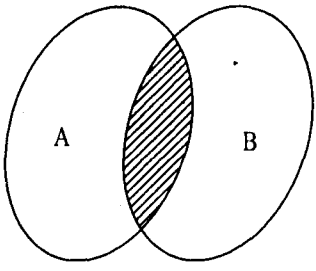
$$P(A)=\left(\frac{9}{10}\right)^{5}.$$

Gọi B là biến cố "vé không có chữ số 5", thì ta cũng có:

$$P(B) = \left(\frac{9}{10}\right)^3.$$

Khi đó biến cố tích AB là "vé không có chữ số 1 và chữ số 5" ta dễ dàng tính được:

$$P(AB) = \left(\frac{8}{10}\right)^5.$$



Để ý rằng ở đây A và B không phải là hai biến cố xung khắc, nên theo quy tắc "cộng mở rộng" ta có:

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B) = 2\left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^5.$$

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố tùy ý, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Điều này có minh họa hình học như biểu đồ Ven ở bên

§3. ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ trong đó p_i là xác suất để X nhận các giá trị x_i.

- Kì vọng của X được kí hiệu là E(X) và xác định như sau:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

- Phương sai của X ký hiệu là V(X) được xác định bằng công thức:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 . P_i.$$

- Độ lệch chuẩn của X được ký hiệu là $\sigma(X)$ xác định bởi công thức:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Để giải các bài toán trong mục này, có hai bước như sau:

Bước 1 : Lập bảng phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X.

Bước 2 : Tùy theo đầu bài đòi hỏi mà ta tính các đại lượng E(X), V(X) hoặc $\sigma(X)$ theo yêu cầu.

Xét các thí dụ sau:

Thí dụ 1:

Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối, cùng chất. Gọi X là tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của con xúc sắc. Lập bảng tính quy luật phân bố xác suất của X và tính E(X)

Giải

Đại lượng ngẫu nhiên X nhận giá trị trong tập {2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}. Ta cần tính $P(X = i) = p_i$, $i = \overline{2,12}$.

Đây chính là các bài toán tìm xác suất dựa vào định nghĩa của xác suất (xem §1). Từ đó ta có bảng quy luật phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X sau đây :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(Bạn đọc tự tính toán theo phép giải đã trình bày kĩ trong mục §1).

Vì thế

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 7.$$

Thí dụ 2

Có hai vận động viên bắn cung A và B tập bắn. Mỗi người bắn hai lần. Xác suất bắn trúng hồng tâm (10 điểm) của A trong mỗi lần bắn là 0,4, còn của B là 0,5. Gọi X là số lần bắn trúng hồng tâm của A trừ đi số lần bắn trúng hồng tâm của B.

1/ Tìm phân bố xác suất của X, rồi tính E(X).

2/ Tìm phân bố xác suất của |X| rồi tính E(|X|).

Giải

1/ Rõ ràng X nhận các giá trị trong tập {–2; –1; 0; 1; 2}

$P(X = -2) = p$ (A bắn trượt 2 lần, B bắn trúng hồng tâm 2 lần).

$= 0,6.0,6.0,5.0,5 = 0,09$

Tương tự các bạn có thể tính P(X = –1), P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2) bằng phép sử dụng phép tính xác suất đã trình bày trong mục §2 và ta đi đến bảng phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X như sau:

X	–2	–1	0	1	2
p_i	0,09	0,30	0,37	0,2	0,04

Từ đó $E(X) = -2(0,09) - 0,30 + 0,2 + 2.0,04$

$= -0,2.$

2/ Đại lượng ngẫu nhiên |X| nhận giá trị trong tập {0; 1; 2}

Theo phần 1/ ta có:

$P(|X| = 0) = P(X = 0) = 0,37$

$P(|X| = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,30 + 0,2 = 0,5$

$P(|X| = 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,09 + 0,04 = 0,13$

Vì thế có bảng phân bố xác suất cho đại lượng ngẫu nhiên |X| sau đây:

|X|	0	1	2
p_i	0,37	0,5	0,13

Từ đó: $E(|X|) = 0,5 + 2.0,13 = 0,76.$

Thí dụ 3:

Trong một chiếc hòm có 5 bóng đèn, trong đó có 2 bóng tốt, 3 bóng hỏng. Ta chọn ngẫu nhiên từng bóng đèn để thử (thử xong không trả lại) cho đến khi thu được 2 bóng tốt. Gọi X là số lần thử cần thiết.

1/ Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X.

2/ Trung bình cần mấy lần thử.

Giải

1/ Rõ ràng đại lượng ngẫu nhiên X nhận giá trị trong tập {2; 3; 4}

Để tìm các giá trị $p_i = p(X = i)$ (i = 2, 3, 4) ta phải giải các bài toán tìm xác suất sau:

+ Tìm $p_2 = P(X = 2)$

Muốn thử hai lần chọn được hai bóng tốt, thì lần đầu phải chọn được bóng tốt. Xác suất để có được điều này là $\frac{2}{5}$; lần thứ hai còn lại là 4 bóng, trong đó có 1 bóng tốt, vậy xác suất để lần thứ hai cũng chọn được bóng tốt là $\frac{1}{4}$. Theo quy tắc nhân ta có:

$$p_2 = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

+ Tìm $p_3 = P(X = 3)$:

Muốn vậy phải xét hai khả năng:

- Hoặc là lần đầu lấy bóng hỏng, hai lần tiếp theo bóng tốt.
- Hoặc là lần đầu lấy bóng tốt, lần 2 bóng hỏng, lần 3 bóng tốt.

Kết hợp cả việc sử dụng định nghĩa để tính xác suất, cũng như các quy tắc cộng và nhân xác suất ta có:

$$p_3 = \frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{1}{3} + \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Vì $p_2+p_3+p_4=1 \Rightarrow p_4 = P(X = 4) = 1 - p_2 - p_3$

$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}.$$

Vậy ta có bảng phân bố xác suất sau đây:

X	2	3	4
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$

Từ đó: $E(X) = 2.\frac{1}{10} + 3.\frac{1}{5} + 4.\frac{7}{10} = 3,6.$

Trung bình cần thử 3,6 lần (về ý nghĩa thực tế tức là giữa 3 và 4 lần)

Nhận xét:

1/ Như vậy trong các bài toán về "đại lượng ngẫu nhiên rời rạc" thực chất là ta phải giải hàng loạt các bài toán về "tìm xác suất của một biến cố".

2/ Để tính p_4 trong thí dụ trên (p_n trong các thí dụ đại lượng ngẫu nhiên rời rạc nhận n giá trị $x_1, x_2,\ldots,x_n$ với các xác suất tương ứng $p_1, p_2,\ldots p_n$), ta chỉ cần tính p_2, p_3 rồi dùng công thức $p_4=1-p_2-p_3$.

$$(p_n=1-\sum_{i=1}^{n-1} p_i).$$

3/ Nếu không dùng chú ý trên bạn có thể tính p_4 như sau:

$p_4 = P(X = 4)$ muốn vậy phải xét 5 khả năng.sau:

- Hai lần đầu bóng hỏng, hai lần sau bóng tốt.
- Hai lần đầu bóng hỏng, lần thứ ba bóng tốt, lần thứ tư bóng hỏng.
- Lần đầu bóng tốt, lần thứ hai bóng hỏng, lần thứ ba bóng hỏng, lần thứ tư bóng tốt.
- Lần đầu bóng hỏng, lần hai bóng tốt, lần ba bóng hỏng, lần bốn bóng tốt.
- Lần đầu bóng hỏng, lần thứ hai bóng tốt, lần thứ ba bóng hỏng, lần thứ tư bóng hỏng.

Khi đó ta có:

$$p_4=\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}+\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{7}{10}.$$

Dĩ nhiên cách tính này rõ ràng không cần thiết !

4/ Chú ý: ta chỉ cần thử tối đa đến lần thứ tư thì xác định ngay được tình trạng của bóng thứ 5, vì thế nếu 4 lần thử trước mới tìm được 1 bóng tốt, thì bóng còn lại chắc chắn là bóng tốt.

Dĩ nhiên nếu yêu cầu khắt khe, bóng gọi là bóng sáng nếu mắt ta phải nhìn thấy nó "sáng thật", thì phải thử đến lần thứ năm!!!

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tìm xác suất trong hai trường hợp sau:

1/ Lấy được 3 viên bi màu đỏ.

2/ Lấy được ít nhất hai viên bi đỏ.

Đáp số: 1/ $\frac{7}{44}$ 2/ $\frac{7}{11}$.

Bài 2:

Cho tám quả cân 1kg, 2kg,... 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên ba quả cân. Tìm xác suất để tổng cộng 3 quả cân không quá 9kg.

Đáp số: $\frac{1}{8}$.

Bài 3:

Cho tập hợp E = {0, 1, 2,..., 8, 9}. Lấy ngẫu nhiên ra hai phần tử của E. Tìm xác suất để hai số lấy ra đều chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 7.

Đáp số: $\frac{4}{45}$.

Bài 4:

Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí khách sạn chọn ngẫu nhiên 6 người. Tìm xác suất để:

1/ Có 4 khách nam và 2 khách nữ.

2/ Có ít nhất hai khách nữ.

Đáp số: *1/* $\frac{3}{7}$ *2/* $\frac{37}{42}$.

Bài 5:

Một đoàn tàu có 3 toa đỗ ở sân ga. Có 5 hành khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa tàu. Tìm xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách lên tàu.

Đáp số: $\frac{50}{81}$.

Bài 6:

Một người bỏ ngẫu nhiên bốn lá thư vào bốn chiếc phong bì thư đã đề sẵn địa chỉ. Tìm xác suất để ít nhất có một lá thư bỏ đúng địa chỉ.

Đáp số: $\frac{5}{8}$.

Hướng dẫn chung: Các bài từ 1–6 dùng định nghĩa của xác suất để giải.

Bài 7:

Gieo đồng thời 3 con xúc sắc. Bạn là người thắng cuộc với xuất hiện ít nhất "2 mặt có quân lục". Tìm xác suất để trong 5 ván chơi, bạn thắng ít nhất 3 ván.

Đáp số: $\frac{52032}{27^5}$.

Bài 8:

Một máy bay có ba bộ phận A, B, C còn tầm quan trọng khác nhau. Giả sử các bộ phận A, B, C tương ứng 15%, 30%, 55% diện tích máy bay.

Máy bay bị rơi nếu hoặc có 1 viên đạn trúng vào A, hoặc hai viên trúng B, hoặc ba viên trúng C. Tìm xác suất để bay bị rơi nếu:

1/ Máy bay bị trúng 2 viên đạn.

2/ Máy bay bị trúng 3 viên đạn.

Đáp số: 1/ 0,3675 2/ 0,72775.

Bài 9:

Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền, mỗi người đá 1 lần với xác suất làm bàn tương ứng là 0,8 và 0,7. Tìm xác suất để ít nhất 1 cầu thủ làm bàn.

Đáp số: 0,94.

Bài 10:

Trong một thành phố, tỷ lệ người thích xem bóng đá là 65%. Chọn ngẫu nhiên 12 người. Tìm xác suất để trong đó có đúng 5 người thích xem bóng đá.

Đáp số: 0,0591.

Bài 11:

Chọn ngẫu nhiên 1 vé xổ số có 5 chữ số. Tìm xác suất để số của vé có chữ số 5 và có chữ số chẵn.

Đáp số: $1-\left(\frac{9}{10}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{2}{5}\right)^5$.

Hướng dẫn chung: Trong các bài 7–11 sử dụng phương pháp dùng các định nghĩa về phép tính xác suất để giải.

Bài 12:

Một nhóm có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi X là số nữ trong nhóm.

1/ Lập bảng phân phối cho đại lượng ngẫu nhiên là X.

2/ Tìm E(X).

Đáp số

1/

X	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

2/ E(X)=1,2.

Bài 13:

Trong một chiếc hòm có 10 tấm thẻ, trong đó 4 thẻ ghi số 1; 3 thẻ ghi số 2; 2 thẻ ghi số 3 và 1 thẻ ghi số 4.

Chọn ngẫu nhiên 2 tấm thẻ và gọi X là tổng các số thu được trên hai tấm thẻ.

Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X.

Đáp số:

X	2	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{45}$

Bài 14:

Một lô hàng gồm 7 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên ra 4 sản phẩm đã kể ra. Gọi X là số chính phẩm trong 4 sản phẩm lấy ra. Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X.

Đáp số:

X	1	2	3	4
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

Bài 15:

Một người có một chùm 7 chìa khóa giống hệt nhau, trong đó chỉ có 2 chìa là mở được cửa. Người đó thử ngẫu nhiên từng chiếc (thử xong bỏ ra ngoài) cho đến khi tìm được chiếc mở được cửa. Gọi X là số lần thử. Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X.

Đáp số:

X	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{12}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{6}{42}$