Trần Thành Minh - Phan Lưu Biên – Trần Quang Nghĩa

GIẢI TÍCH 11

Hàm số lượng giác
Phương trình lượng giác

www.saosangsong.com.vn

CHƯƠNG I : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC & PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1 . Các hàm số lượng giác

A . Tóm tắt giáo khoa :

1 . Hàm số y = f(x) = sinx :

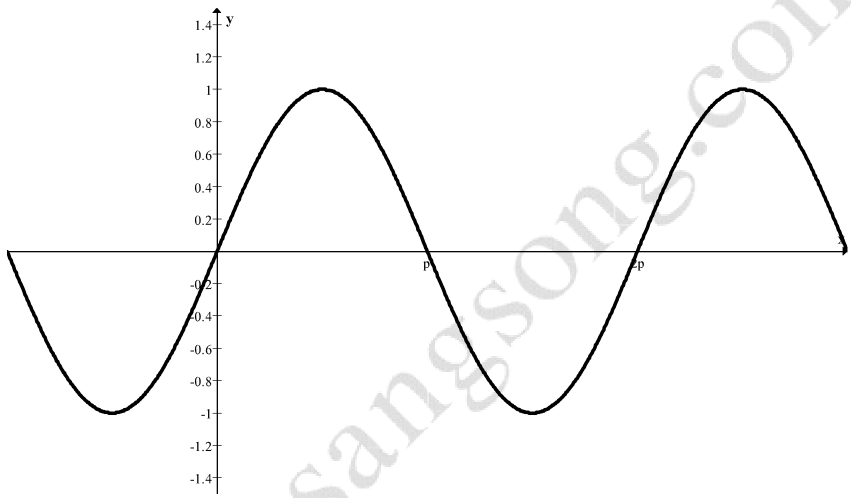
a) Tập xác định là R ; tập giá trị là đoạn $\left[-1, 1\right]$

b) Là một hàm số lẻ nghĩa là sin (- x) = - sin (x) với mọi x

c) Là một hàm số tuần hòan chu kỳ là 2π nghĩa là $f(x+k2\pi)=f(x);k\in Z$

d) Đồng biến trên mỗi khỏang $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\frac{\pi}{2}+k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khỏang $(\frac{\pi}{2}+k2\pi,\frac{3\pi}{2}+k2\pi);k\in Z$

e) Có đồ thị là một đường hình sin .



2 . Hàm số y = f(x) = cosx :

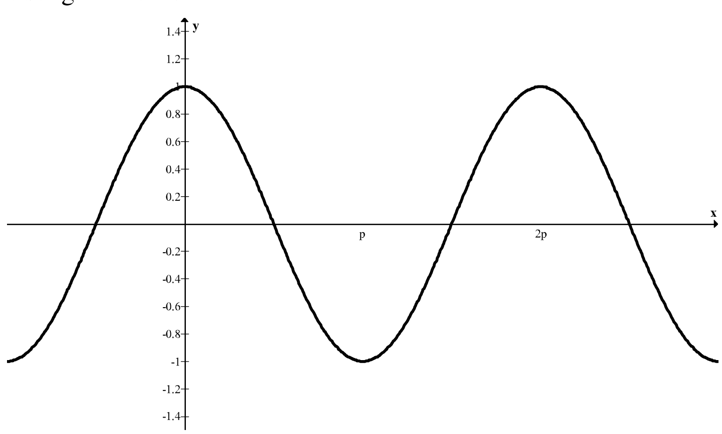
a) Tập xác định là R ; tập giá trị là đoạn $\left[-1,1\right]$

b) Là một hàm số chẵn nghĩa là cos (- x) = cos (x) với mọi x

c) Là một hàm số tuần hòan chu kỳ là 2π

d) Đồng biến trên mỗi khỏang $((2k-1)\pi,2k\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khỏang $(2k\pi,(2k+1)\pi);k\in Z$

e) Có đồ thị là một đường hình sin .



3 . Hàm số y = f(x) = tanx :

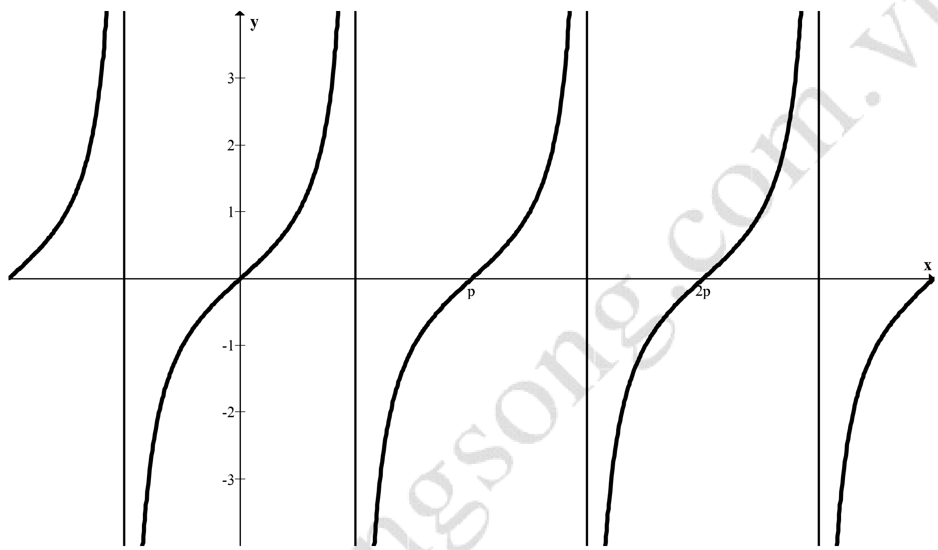
a) Tập xác định là $R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}; k \in Z$; tập giá trị là R .

b) Là một hàm số lẻ .

c) Là một hàm số tuần hòan chu kỳ là π

d) Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$

e) Có đồ thị nhận các đường thẳng x = $\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z$ làm tiệm cận đứng



4 . Hàm số y = f(x) = cotx :

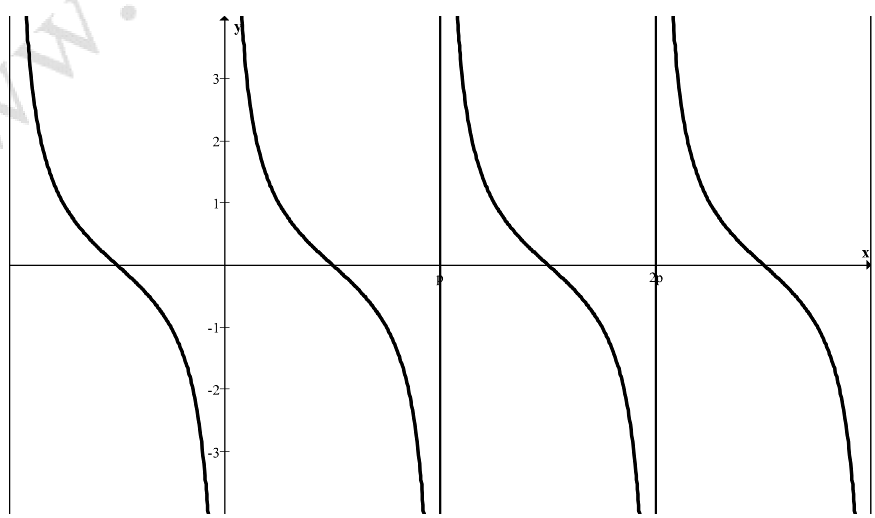
a) Tập xác định là $R \setminus \{k\pi\}; k \in Z$; tập giá trị là R .

b) Là một hàm số lẻ

c) Là một hàm số tuần hòan chu kỳ là π

d) Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi, (k+1)\pi); k \in Z$

e) Có đồ thị nhận đường thẳng x = kπ làm đường tiệm cận đứng .



5 . Hàm số tuần hòan :

Cho hàm số y = f (x) xác định trên D . Nếu có một số T thỏa các điều kiện : Với mọi x thuộc D , (x + T) thuộc D ; (x – T) thuộc D và f (x + T) = f (x) thì hàm số này được gọi là một hàm số tuần hòan . Khi T là số dương nhỏ nhất thỏa các điều kiện trên thì T được gọi là chu kỳ của hàm số .

B . Giải tóan :

Ví dụ 1 : Tìm tập xác định của các hàm số sau :

$a)\ y=\sqrt{1+\cos x}$ $\qquad b)\ y=\dfrac{x}{1-\cos x}$

$c)\ y=\dfrac{x^2}{\tan x-\sqrt{3}}$ $\qquad c)\ y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

Giải :

a) Ta có : 1 + cosx $\geq 0, \forall x \in R$. Vậy hàm số này có tập xác định là R .

b) Hàm số xác định khi 1 – cosx $\neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi ; k \in Z$. Vậy tập xác định của hàm số này là : $R \setminus \{k2\pi\}; k \in Z$.

c) Hàm số xác định khi tanx xác định và tanx $-\sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq \sqrt{3} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{3}$; $x \in \left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Vì hàm số y = tanx có chu kỳ là π nên tập xác địmh của hàm số là : $R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right\}$

d) Ta có : $\begin{cases}1+\sin x \geq 0\\ 1-\sin x \geq 0\end{cases}$ $\forall x \in R\,(do -1 \leq \sin x \leq 1)$. Vậy hàm số xác định khi

$1-\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k2\pi$. Tập xác định của hàm số là $R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}; k \in Z$.

Ví dụ 2 : Xét tính chẵn , lẻ của các hàm số sau :

a) y = f (x) = 2cos4x – 1 b) y = g (x) = 2sin2x +3

c) y = h (x) = (sinx + cosx + 1)(sinx + cosx – 1)

d) y = k (x) = $\sin^3 x.\cos x + \tan x$

Giải :

a) Tập xác định của hàm số là R . f (- x) = 2 cos4(- x) – 1 = 2 cos(-4x) – 1
= 2cos4x – 1= f (x) với mọi x.
Vậy y = f (x) là hàm số chẵn .

b) Tập xác định của hàm số là R . g (- x) = 2sin2(-x) + 3 = -2sin2x + 3 $\neq$ g (x) hoặc $\neq$ -g (x) , chẳng hạn :

$$g(-\frac{\pi}{12})=2\sin 2(-\frac{\pi}{12})+3=-1+3=2;\, g(\frac{\pi}{12})=2\sin 2(\frac{\pi}{12})+3=4$$

$$g(-\frac{\pi}{12})\neq g(\frac{\pi}{12});\, g(-\frac{\pi}{12})\neq -g(\frac{\pi}{12})$$

Vậy hàm số y = g (x) không chẵn và cũng không lẻ . (hàm số không có tinh chẵn hoặc lẻ)

c) Tập xác định của hàm số là R Ta có :

h (x) = $(\sin x+\cos x)^2-1=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x-1=\sin 2x$.

Do đó : h (-x) = sin2(-x) = sin (-2x) = - sin2x = -h (x) với mọi x .

Vậy hàm số y = h (x) là một hàm số lẻ .

d) Tập xác định của hàm số y = k (x) là : $D = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$. Với mọi x thuộc D hiển nhiên (- x) cũng thuộc D và ta có : k (-x) $= \sin^3(-x)\cos(-x) + \tan(-x) = -\sin^3 x \cos x - \tan x = -k(x)$

Vậy hàm số y = k (x) là một hàm số lẻ .

Ví dụ 3 : Tìm khoảng đồng biến của các hàm số sau :

$a)\ y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ $\qquad b)\ y = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$

$c)\ y = \cos^2 x$ $\qquad d)\ y = \sin^2 x$

Giải :

a) Đặt X = x + $\frac{\pi}{3}$, ta có : y = sinX và hàm số này đồng biến khi :

$$-\frac{\pi}{2} + k2\pi < X < \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k2\pi \ .$$

(xem sách giáo khoa) . Vậy hàm số này đồng biến trên mọi khoảng $(-\frac{5\pi}{6} + k2\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi)$

b) Tương tự như trên , hàm số này đồng biến khi :

$(2k-1)\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$. Vậy hàm số này đồng biến trên mọi khoảng $(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi)$; chẳng hạn đồng biến trên những khỏang sau : (cho k = 0 , 1 , .)

$(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$; $(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6})$...

c) Ta có : $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Để ý rằng , nếu hàm số y = f (x) đồng biến thì các hàm số C + f (x) (C là một hằng số) và C'.f (x) (C' là một hằng số dương) cũng là các hàm số đồng biến (dùng định nghĩa ta có ngay các kết quả này) .

Vậy hàm số y = cos^2 x đồng biến khi hàm số y = cos2x đồng biến . Tương tự như trên , ta có : hàm số này đồng biến khi $(2k-1)\pi < 2x < 2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi$. Tóm lại , hàm số y = cos^2 x đồng biến trên mọi khoảng $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$

d) Ta có : $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Lý luận tương tự , hàm số y = sin^2 x đồng biến khi hàm số cos2x nghịch biến . Vậy hàm số y = sin^2 x đồng biến khi $2k\pi < 2x < (2k+1)\pi \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Tóm lại , hàm số y = sin^2 x đồng biến trên mọi khoảng $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); k \in Z$.

Ví dụ 4 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

$a)\ y = 2\cos(3x - \frac{\pi}{6}) - 1$ $\qquad b)\ y = 2\cos^2 x + 3\sin^2 x + 5$

$c)\ y = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x}$ $\qquad d)\ y = 4\cos^2 x + 4\cos x + 3$

Giải :

a) Ta có : $-1 \le \cos(3x - \frac{\pi}{6}) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos(3x - \frac{\pi}{6}) \le 2 \Leftrightarrow -3 \le 2\cos(3x - \frac{\pi}{6}) - 1 \le 1$

Do đó : $-3 \le y \le 1$;

$y = -3\ khi \cos(3x - \frac{\pi}{6}) = -1$ (chỉ cần chọn x sao cho $3x - \frac{\pi}{6} = \pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{18}$)

$y = 1\ khi\ \cos(3x - \frac{\pi}{6}) = 1$ (chỉ cần chọn x sao cho $3x - \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18}$)

Vậy giá trị lớn nhất của y là 1 ; giá trị nhỏ nhất của y là – 3 .

b) Ta có : y = $2\cos^2 x + \sin^2 x + 5 = \cos^2 x + 6$ (vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) . Mà :
$0 \le \cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow 6 \le \cos^2 x + 6 \le 7 \Leftrightarrow 6 \le y \le 7$

y = 6 khi cosx = 0 (chỉ cần lấy x = $\frac{\pi}{2}$) ; y = 7 khi cosx = 1 (chỉ cần lấy x = 0) .

Vậy giá trị lớn nhất của y là 7 ; giá trị nhỏ nhất của y là 6 .

c) Ta có : $y = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} = \sqrt{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} = \sqrt{(1+\cos^2 x)^2} = 1 + \cos^2 x$

Tương tự câu b) , ta có : $1 \le y \le 2$ và giá trị lớn nhất của y là 2 ; giá trị nhỏ nhất của y là 1 .

d) Ta có : y = $(2\cos x + 1)^2 + 2$.

$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -1 \le 2\cos x + 1 \le 3 \Rightarrow 0 \le (2\cos x + 1)^2 \le 9$

$\Rightarrow 2 \le y \le 11$

Vậy giá trị lớn nhất của y là 11 ; giá trị nhỏ nhất của y là 2 .

Ví dụ 5 : Cho hàm số y = f (x) = $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 3$.

a) Chứng minh rằng : $f(x + \frac{k\pi}{2}) = f(x), \forall x \in R\ (k \in Z)$ và f (x) là một hàm số tuần hòan

b) Lập bảng biến thiên của hàm số này trên đọan $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ và vẽ đồ thị của nó .

Giải :

a) Ta có : y = f (x) = $4(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 8\sin^2 x.\cos^2 x - 3$
$= 4 - 2\sin^2 2x - 3 = 1 - (1 - \cos 4x) = \cos 4x$. Do đó :

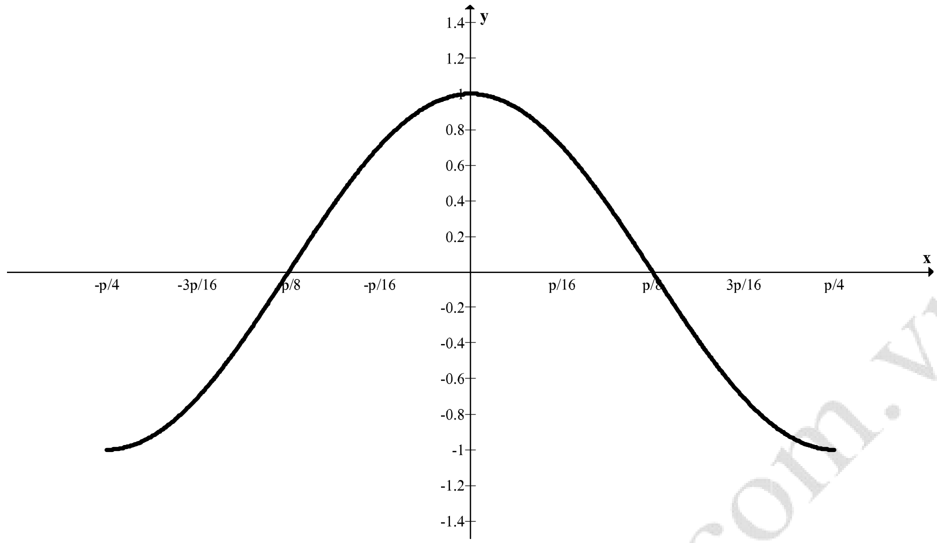
$f(x + \frac{k\pi}{2}) = \cos 4(x + \frac{k\pi}{2}) = \cos(4x + k2\pi) = \cos 4x = f(x)$. Lấy k =1 , ta có :

$f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$; $(T = \frac{\pi}{2})$. Hàm số y = f (x) có miền xác định là R và có số T thỏa :

(x + T) thuộc R ; (x – T) thuộc R và f (x + T) = f (x) . Vậy hàm số này là một hàm số tuân hòan .

b) Từ bảng biến thiên của hàm số y = cosX (với X = 4x) , ta có bảng sau : (ghi giá trị của X ở hàng thứ 2 trước , rồi ghi giá trị tương ứng của x ở hàng thứ 1) .

x	$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{8}$		0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$
4x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
Y = cos4x	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



C . Bài tập rèn luyện :

1.1 . Tìm tập xác định của các hàm số sau :

$a) y = \cos(3x + \frac{\pi}{3})$ $\qquad b) y = \sqrt{\sin^2 x - 1}$

$c) y = \frac{x^2 + 1}{x \sin x}$ $\qquad d) y = \sqrt{\frac{1}{1 + \cos 2x}}$

$e) y = \frac{\tan x}{\tan x - 1}$ $\qquad f) y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sin x}$

1.2 . Xét tính chẵn , lẻ của các hàm số sau :

a) y = 2cos3x +4 $\qquad$ b) y = sin (x^2 + 3)

c) y = tanx.cotx + 2$\sin^2$ x + $\cos^2$ x $\qquad$ d) $y = \cot(|x|) + \sin(x^2 + |x|)$

1.3 . Tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

$a) y = 2\cos(3x - \frac{\pi}{3})$ $\qquad b) y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}); x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, 0\right]$

$c) y = 2\cos^2 2x + 4\sin^2 x \cos^2 x + 3$ $\qquad d) y = 2\cos^2 x + \sin^2 x + 4\cos x - 7$

$e) y = \frac{1}{2\cos^2 x + 3}$ $\qquad f) y = \frac{3\sin^2 x + 8}{\sin^2 x + 2}$

*1.4 . Tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số sau :

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$$

*1.5 . a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \cos 2x + \frac{1}{2\cos^2 x + 1} (1)$$

b) Chứng minh rằng hàm số sau đồng biến :

$y = t + \frac{1}{t}$; $t \in [1,3]$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số (1) .

1.6 . Tìm khỏang đồng biến (hoặc là nghịch biến) của các hàm số sau :

$a) y = \cot(x + \frac{\pi}{6})$ $\qquad b) y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$

$c) y = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$ $\qquad d) y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

1.7 . Từ các đồ thị đã học , vẽ đồ thị của các hàm số sau trên đoạn [π ; π]

$a) y = \sin x - 2$ $\qquad b) y = |\cos x|$

$c) y = \sin|x|$ $\qquad d) y = \tan|x|$

D . Hướng dẫn – Đáp số .

1.1. a) Tập xác định là R .

b) Hàm số xác định khi : $\sin^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 (do \sin^2 x \leq 1) \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số là : $D = \left\{\pm\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} = \left\{... -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...\right\}; k \in Z$

c) Hàm số xác đ\ịmh khi :

$$x \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi$$

Vậy tập xác định của hàm số là : $R \setminus \{k\pi\}$

$d) R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \qquad e) R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \qquad f) D = [-1, 0) \cup (0, 1]$

1.2 . a) chẵn b) chẵn c) chẵn d) chẵn .

1.3 . a) GTLN là 2 ; GTNN là —2 .

b) $x \in \left[\frac{-5\pi}{12}, 0\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -1 \leq \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy GTLN là $\frac{\sqrt{3}}{2}$; GTNN là - 1 .

c) y = 4 + $\cos^2$ 2x . Vậy GTLN là 5 ; GTNN là 4 .

d) y = (cosx + 2 $)^2$ – 10 . $1 \leq \cos x + 2 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq (\cos x + 2)^2 \leq 9 \Rightarrow -9 \leq y \leq -1$

GTLN : - 1 ; GTNN : - 9

e) $3 \leq 2\cos^2 x + 3 \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2\cos^2 x + 3} \leq \frac{1}{3}; GTLN : \frac{1}{3}; GTNN : \frac{1}{5}$.

f) Ta có : $y = \frac{3(\sin^2 x + 2) + 2}{\sin^2 x + 2} = 3 + \frac{2}{\sin^2 x + 2}; GTLN : 4$; $GTNN : \frac{11}{3}$

* 1.4 . Ta có :

$$y = \frac{3(1 - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2(1 - \sin^2 x)} = \frac{3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 2 + 1}{3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 2} = 1 + \frac{1}{3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 2}$$

$$= 1 + \frac{1}{3(\sin^2 x - \frac{1}{3})^2 + \frac{5}{3}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}} \leq y \leq 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$GTLN : \frac{8}{5}$; $GTNN : \frac{4}{3}$

*1.5 . a) Ta có : $y = 2\cos^2 x + 1 + \dfrac{1}{2\cos^2 x + 1} - 2 \geq 2 - 2 = 0\,(Cosi)$.

Dấu " = " xảy ra khi cosx = 0 . Vậy GTNN là 0 .

b) $y_2 - y_1 = t_2 - t_1 + \dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1} = (t_2 - t_1)(1 - \dfrac{1}{t_2 t_1}) > 0\ (t_2 > t_1 ; \dfrac{1}{t_2 t_1} < 1)$

Vậy hàm số y = t + $\dfrac{1}{t}$ đồng biến . Suy ra : y (t) ≤ $y(3) = \dfrac{4}{3}; t \in [1,3]$

Lấy t = $2\cos^2$ x + 1 ta có GTLN của hàm số (1) là $\dfrac{4}{3}$

Chú ý : Dùng tính đồng biến này ta có thể tìm được GTNN của y ở câu a)

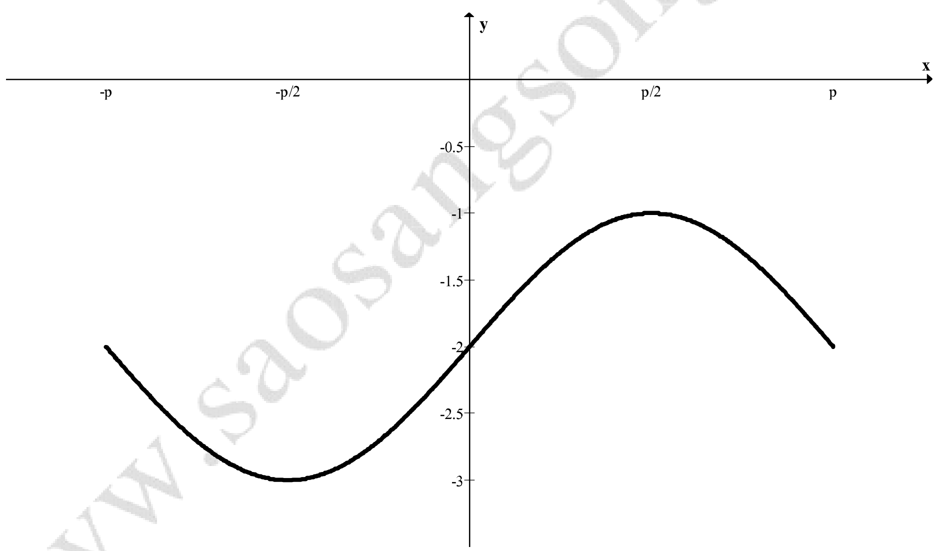
1.6 . a) Hàm số nghịch biến khi : $k\pi < x + \dfrac{\pi}{6} < (k+1)\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$

b) Hàm số đồng biến khi : $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

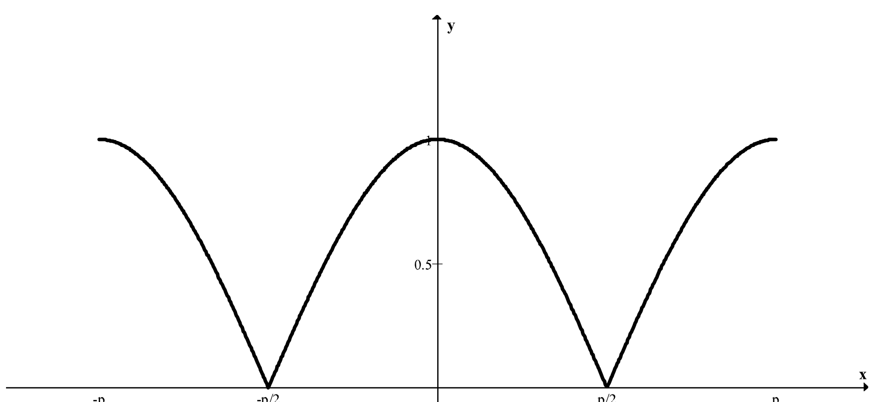
c)Hàm số nghịch biến khi : $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi < 2x - \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$

d) Đồng biến khi : $(2k-1)\pi < 2x + \dfrac{\pi}{3} < k2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi < x < -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

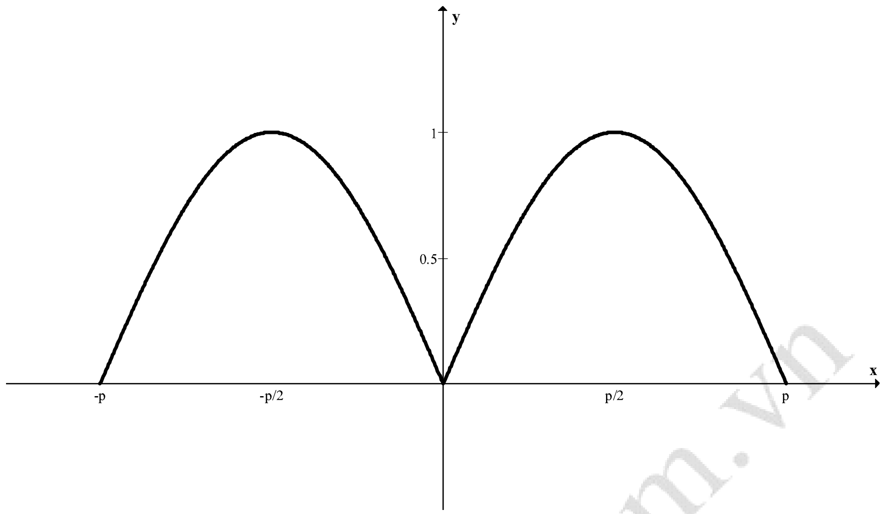
1.7 . a) Tịnh tiến đồ thị của hàm số y = sinx xuống phía dưới một đoạn có chiều dài bằng 2



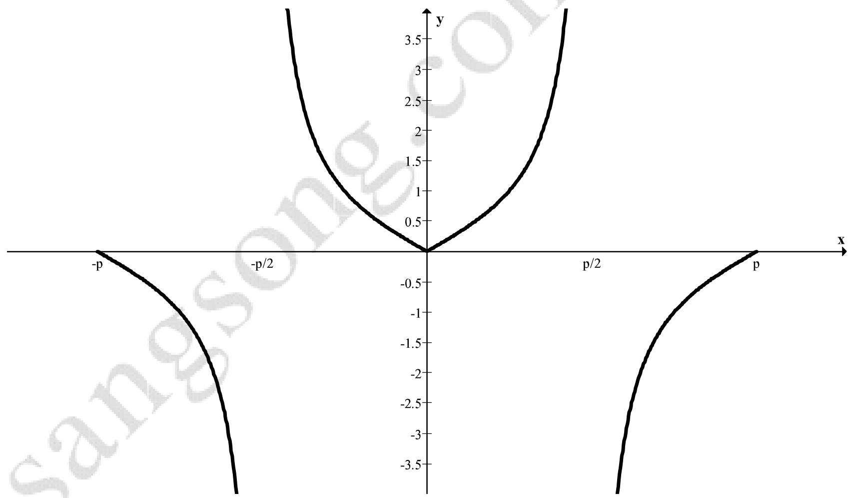
b) Giữ nguyên phần đồ thị y = cos x ở phía trên Ox . Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị y = cosx ở phía dưới Ox. Hai phần hợp lại tỉnh ồ thị cần vẽ.



c) Giữ nguyên phần đồ thị y = sinx ở bên phải Oy. Vẽ thêm đối xứng của phần này qua Oy. Hai phần hợp lại thành đồ thị cần vẽ.

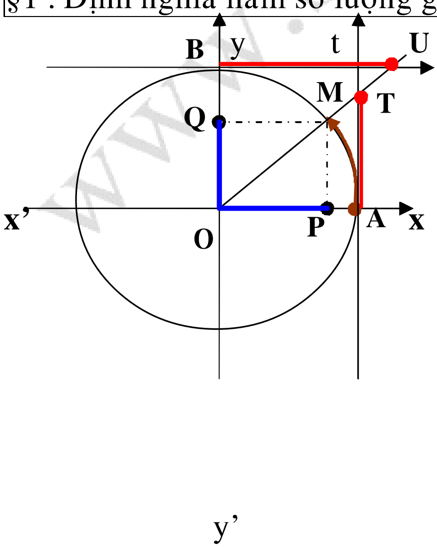


d) Giữ nguyên phần đồ thị y = tanx ở bên phải Oy. Vẽ thêm đối xứng của phần này qua Oy. Hai phần hợp lại thành đồ thị cần vẽ.



ÔN CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC (LỚP 10)

§1 . Định nghĩa hàm số lượng giác



Cho số thực φ, gọi M là điểm biểu diễn góc φ, tức sđ$\overset{\frown}{AM} = \varphi$, thế thì :

$$\overline{OP} = x_M = \cos\varphi$$

$$\overline{OQ} = y_M = \sin\varphi$$

$$\overline{AT} = \tan\varphi$$

$$\overline{BU} = \cot\varphi$$

§2. Hệ thức cơ bản

$\sin(x + k.2\pi) = \sin x,\ \forall k \in \mathbf{Z}$ $\cos(x + k.2\pi) = \sin x,\ \forall k \in \mathbf{Z}$ $\tan(x + k.\pi) = \tan x,\ \forall k \in \mathbf{Z}$ $\cot(x + k.\pi) = \cot x,\ \forall k \in \mathbf{Z}$	**$-1 \le \sin x \le 1$** **$-1 \le \cos x \le 1$**	tanx chỉ xác định khi $x \neq \pi/2 + k.\pi$	cotx chỉ xác định khi $x \neq k.\pi$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x.\cot x = 1$ $\tan x = \sin x/\cos x$ $\cot x = \cos x/\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$		

§3 . Công thức góc liên quan

1. Góc đối : a và – a

cos(- a) = cosa
sin(- a) = - sina
tan(- a) = - tana
cot(- a) - cota

2. Góc bù : a và π – a

sin(π - a) = sina
cos(π - a) = - cosa
tan(π - a) = - tana
cot(π - a) - cota

3. Góc hơn π : a và π + a

tan(π + a) = tana
cot(π + a) = cota
sin(π + a) = - sina
cos(π + a) = - cosa

4. Góc phụ nhau : a và $\pi/2 - a$

sin($\pi/2 - a$) = cosa
cos($\pi/2 - a$) = sina
tan($\pi/2 - a$) = cota
cot($\pi/2 - a$) = tana

5. Góc hơn $\pi/2$: a và $\pi/2$ + a

sin($\pi/2 + a$) = cosa
cos($\pi/2 + a$) = - sina
tan($\pi/2 + a$) = - cota
cot($\pi/2 + a$) = - tana

§4 . Công thức lượng giác

1 . Công thức cộng :

cos (x + y) = cosxcosy – sinxsiny
cos (x – y) = cosxcosy + sinxsiny
sin (x + y) = sinxcosy + sinycosx
sin (x – y) = sinxcosy – sinycosx

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

2 .Công thức nhân đôi :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

3 . Công thức hạ bậc :

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad ; \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad ; \quad \tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \quad ; \quad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

4 . Công thức tính sinx , cosx , tanx theo t = $\tan\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

5 . Công thức biến đổi :

a) Biến đổi tổng thành tích :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

b) Biến đổi tích thành tổng :

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$
$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$$

6 .Biến đổi biểu thức (asinx + bcosx) = csin(x+α)

$$c = \sqrt{a^2+b^2}\ ;\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặc biệt:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x+\frac{\pi}{6}) = 2\cos(x-\frac{\pi}{3})$$
$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin(x+\frac{\pi}{3}) = 2\cos(x-\frac{\pi}{6})$$

7. Các hệ thức cần nhớ:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$
$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Giải Tóan :

Dạng tóan 1 : **Rút gọn một biểu thức**

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{\cos a}{1-\sin a} - \dfrac{1}{\cos a}$ b) $B = \dfrac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x - \cot^2 x}$

c) $C = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x}$ d) $D = 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\cos^2 x - \sin^2 x)^2$

Giải:

$$a)\ A = \frac{\cos^2 a - (1-\sin a)}{(1-\sin a)\cos a} = \frac{(1-\sin a)(1+\sin a) - (1-\sin a)}{(1-\sin a)\cos a}$$
$$= \frac{(1+\sin a) - 1}{\cos a} = \tan a$$

$$b)\ B = \frac{\sin^2 x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x(\sin^2 x - 1)}$$
$$= \frac{-\sin^4 x}{\cos^2 x}.\frac{\sin^2 x}{-\cos^4 x} = \frac{-\sin^6 x}{-\cos^6 x}$$
$$= \tan^6 x$$

$$c)\ C = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x(\sin^2 x - 1) + \cos^4 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{-\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$d)\ D = 4(1 - 3\sin^2 x\cos^2 x) - 3(\cos 2x)^2$$
$$= 4(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x) - 3(1 - \sin^2 2x)$$
$$= 1$$

Ví dụ 2 : Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\cos x + \cos 2x)^2 + (\sin x + \sin 2x)^2$ b) $B = \sin(x + 60^0)\sin(x - 60^0) - \sin^2 x$

c) $C = 4\sin x \cos(x + 30^0)\cos(x - 30^0)$ d) $D = \sin^4 x + \cos^4 x - \dfrac{3+\sin 4x}{4}$

Giải:

a) $A = (\cos^2 x + \cos^2 2x + 2\cos x\cos 2x) + (\sin^2 x + \sin^2 2x + 2\sin x\sin 2x)$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 2x + \sin^2 2x) + 2(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x)$

$= 1 + 1 + 2\cos x = 2 + 2\cos x$

b) $B = \dfrac{1}{2}.(\cos 120^0 - \cos 2x) - \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$= \dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{2} - \cos 2x) - \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) = -\dfrac{3}{4}$

c) $C = 2\sin x(\cos 2x + \cos 60^0) = 2\sin x(\cos 2x + ½)$

$= 2\sin x\cos 2x + \sin x = (\sin 3x - \sin x) + \sin x$

$= \sin 3x$

d) Ta biến đổi: $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$= 1 - \frac{1}{2}\frac{1-\cos 2x}{2}$

$= \frac{3+\cos 4x}{4}$ (đây là phép biến đổi cần nhớ)

Cũng cần nhớ luôn $\boxed{\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5+3\cos 4x}{8}}$

Suy ra : $D = \frac{\cos 4x - \sin 4x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos(4x + \frac{\pi}{4})$

Ví dụ 3 : Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$

b) $B = \sin^5 x\cos x - \cos^5 x\sin x$

c) $C = \tan x + \cot x + 2\cot 2x$

d) $D = \sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x$

e) $E = \sin^3 x\sin x + \cos^3 x\cos x$

Giải:

a) $A = 1 - 8\cos^2 x(1 - \cos^2 x) = 1 - 8\cos^2 x\sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x$

b) $B = \sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) = ½ . \sin 2x . (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$

$= ½ . \sin 2x . \cos 2x . 1 = ¼ \sin 4x$

c) $C = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\sin x} + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$

$= \frac{2}{\sin 2x} + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2(1+\cos 2x)}{\sin 2x}$

$= \frac{2.2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = 2\cot x$

d) Thay $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$; $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, ta được :

$D = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\cos x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\sin x$

$= \frac{1}{4}(6\sin x\cos x) + \frac{1}{4}(\cos 3x\sin x - \cos x\sin 3x) = \frac{3}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$

$= ½ \sin 2x$

e) Thay $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$; $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, ta được :

$E = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\sin x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\cos x$

$= \frac{3}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{4}(\cos 3x\cos x - \sin x\sin 3x)$ = ¾ + ¼ cos4x

Dạng tóan 2 : **Tìm GTLN, GTNN của biểu thức lượng giác**

- Rút gọn biểu thức gọn như có thể rồi dùng bất đẳng thức lượng giác
  - $-1 \le \sin u \le 1$; $-1 \le \cos u \le 1$, $\forall u$
  - $0 \le \sin^2 u \le 1$; $0 \le \cos^2 u \le 1$, $\forall u$

Ví dụ 1 : Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức sau

a) $A = \sin^4 x + \cos^4 x$ b) $B = \sin^6 x + \cos^6 x + \sin^2 x$

c) $C = \sin x\cos(x + 30^0)\cos(x - 30^0)$ d) $D = \sin^3 x\sin x - \cos^3 x\cos x$

Giải:

a) $A = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - ½ . \sin^2 2x$

Mà $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $\frac{1}{2} \le A \le 1$. Vậy GTLN là 1 và NN là ½ .

b) $B = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x - 3\sin^2 x = 1 - 3\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x$

$= 3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 = 3(\sin^2 x - 1/3)^2 + 2/3$

Vì $0 \le \sin^2 x \le 1$ nên $-1/3 \le \sin^2 x - 1/3 \le 2/3 \Rightarrow 0 \le (\sin^2 x - 1/3)^2 \le 4/9$

$\Rightarrow 2/3 \le B \le 3.4/9 + 2/3 = 2$

Vậy GTNN là 2/3 và GTLN là 2.

c) $C = \sin x . ½ (\cos 60^o + \cos 2x) = ¼ \sin x + ½ .\cos 2x\sin x$

$= ¼ \sin x + ¼ .(\sin 3x - \sin x) = ¼ .\sin 3x$

Vì $-1 \le \sin 3x \le 1$ nên $-¼ \le C \le ¼$ và GTLN là ¼ và GTNN là – ¼.

d) Thay $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$; $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, ta được :

$= \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\sin x - \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\cos x$

$D = = \frac{3}{4}(\sin^2 x - \cos^2 x) - \frac{1}{4}(\cos 3x\cos x + \sin 3x\sin x) = -\frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x$

$= -\cos 2x$

Vậy GTLN là 1 và GTNN là – 1.

Ví dụ 2: Tìm GTLN của $f(x) = (\tan x - \cot x)^2 - \frac{1}{\sin^4 2x}$

Giải:

Ta có : $\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x\sin x} = \frac{-\cos 2x}{1/2.\sin 2x} = -2\cot 2x$

Và $\frac{1}{\sin^4 2x} = \left(\frac{1}{\sin^2 2x}\right)^2 = \left(1 + \cot^2 2x\right)^2 = \cot^4 2x + 2\cot^2 2x + 1$

Suy ra $f(x) = 4\cot^2 2x - (\cot^4 2x + 2\cot^2 2x + 1)$

$= -(\cot^4 2x - 2\cot^2 2x + 1) = -(\cot^2 2x - 1)^2 \le 0$

Vậy GTLN của f(x) là 0 khi $\cot^2 2x - 1 = 0$ (lấy $x = -\pi/8$).

§2 . Phương trình lượng giác cơ bản .

1. Phương trình lượng giác cơ bản.

A . Tóm tắt giáo khoa .

Phương trình lượng giác cơ bản và công thức nghiệm :

$$\sin X = \sin A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = A + k2\pi \\ X = \pi - A + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\cos X = \cos A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = A + k2\pi \\ X = -A + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\tan X = \tan A \Leftrightarrow X = A + k\pi \ (A \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi)$$

$$\cot X = \cot A \Leftrightarrow X = A + k\pi \,(A \neq k'\pi)$$

Chú ý :

a) Đối với phương trình sinX = m ($-1 \le m \le 1$) , ta có các chú ý sau :

1) Nghiệm duy nhất thuộc đọan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ được ký hiệu là : $\boxed{\text{arcsinm}}$.

Như thế : $\boxed{\sin X = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \arcsin m + k2\pi \\ X = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right.}$

2) Khi m = 0 hay m = 1 hay m = - 1 , ta có thể viết công thức nghiệm gọn :

$$\boxed{\sin X = 0 \Leftrightarrow X = k\pi \ ; \ \sin X = 1 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ ; \ \sin X = -1 \Leftrightarrow X = -\frac{\pi}{2} + k2\pi}$$

b) Đối với phương trình cosX = m $(-1 \le m \le 1)$, ta có các chú ý :

1) Nghiệm duy nhất thuộc đọan $[0, \pi]$ được ký hiệu là : $\boxed{\text{arccosm}}$.

Như thế : $\boxed{\cos X = m \Leftrightarrow X = \pm \arccos m + k2\pi}$

2) Khi m = 0 hay m = 1 hay m = - 1 , ta có thể viết công thức nghiệm gọn :

$$\boxed{\cos X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ \cos X = 1 \Leftrightarrow X = k\pi \ ; \ \cos X = -1 \Leftrightarrow X = \pi + k2\pi}$$

c) Tương tự đối với 2 phương trình : tanX = m ; cotX = m

$$\tan X = m \Leftrightarrow X = \arctan m + k\pi \ \left(m \in R; \arctan m \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cot X = m \Leftrightarrow X = arc\cot m + k\pi \ (m \in R; arc\cot m \in (0, \pi))$$

B . Giải tóan .

Dạng tóan 1 : Phương trình cơ bản cosX = cosA ; sinX = sinA

Ta cần thuộc công thức nghiệm và chú ý rằng các dạng sau có thể đưa ngay về dạng trên :

- cosX = - cosA ⇔ cosX = cos(π - A)
- sinX = - sinA ⇔ sinX = sin (- A)
- sinX = cosA ⇔ cos($(\frac{\pi}{2} - A)$) = cosA ⇔ sinX = sin $(\frac{\pi}{2} - A)$
- sinX = - cosA thành cos(π /2 + X) = cosA

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

$a)\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin(x-\frac{\pi}{4})\ (1)$ $\qquad b)\cos(x+20^o)=\cos(3x-12^o)\ (2)$

$c)\sin(x+\frac{\pi}{5})=\cos(3x-\frac{\pi}{10})\ (3)$ $\qquad d)\ (2\sin x-1)(3\cos x+2)=0\ (4)$

Giải :

$$a)(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=\pi-x+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.$$

$$b)(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+20^o=3x-12^o+k360^o\\2x+20^o=-3x+12^o+k360^o\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=32^0-k360^o\\x=-1^o,6+k72^o\end{array}\right.$$

$$c)(3)\Leftrightarrow\sin(x+\frac{\pi}{5})=\sin(\frac{\pi}{2}-3x+\frac{\pi}{10})$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-3x+\frac{\pi}{10}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{2}+3x-\frac{\pi}{10}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2}\\x=-\frac{\pi}{10}-k\pi\end{array}\right.$$

$$d)(4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\3\cos x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}\\\cos x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.<=>\left[\begin{array}{l}x=\pi/6+k.2\pi\\x=5\pi/6+k.2\pi\\x=\pm\arccos(-2/3)+k.2\pi\end{array}\right.$$

Ví dụ 2 : Định m để các phương trình sau có nghiệm

a) sinxcosx = 4m + 6 (1)
b) $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 2m^2 + m$ (2)

Chú ý : Phương trình sin x = m , cos x = m có nghiệm ⇔ - 1 ≤ m ≤ 1

Giải :

a) (1) ⇔ sin 2x = 2m + 3
Vậy (1) có nghiệm khi : $-1\le 2m+3\le 1\Leftrightarrow -2\le m\le -1$

b) (2) ⇔ cos6x = $2m^2 + m$

(2) có nghiệm khi : $-1\le 2m^2+m\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2+m+1\ge 0\,(a)\\2m^2+m-1\le 0\ \ (b)\end{cases}$

(a) thỏa với mọi m vì $\Delta=1-4.2.1=-7<0$

$(b)\Leftrightarrow -1\le m\le\frac{1}{2}$

Vậy (2) có nghiệm khi : $-1\le m\le\frac{1}{2}$

Dạng tóan 2 : Phương trình cơ bản dạng tanX = tanA ; cotX = cotA

Nhận xét tương tự như ở dạng toán 1 :

- tanX = - tanA ⇔ tanX = tan (- A)
- cot X = - cotA ⇔ cotX = cot (– A)
- tanX = cotA ⇔ tanX = tan(π / 2 – A)
- tanX = - cotA ⇔ tanX = tan(π /2 + A)

(Nếu A là hằng số thì không cần điều kiện)

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

$a)\tan(x+\frac{\pi}{6})=\tan(2x+\frac{\pi}{4})$ (1) $b)\cot x=-\sqrt{3}$ (2)

$c)\tan(2x+110^o)=\cot(x+10^o)$ (3) $d)2\tan(x+18^o)-\cot(72^o-x)=2$ (4)

Giải :

$$a)(1)\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$$

$$So\ \text{điều kiện}: x+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+m\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}+k\pi+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$$

$$\Leftrightarrow -1+12k+2\neq 6+12m \Leftrightarrow k\neq\frac{5}{12}+m\ (\text{luôn thỏa vì k và m là số nguyên})$$

$$\text{Vậy } x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ là nghiệm}$$

$$b)(2)\Leftrightarrow \cot x=\cot(-\frac{\pi}{6})\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{6}+k\pi\ \ (\text{không cần điều kiện})$$

c) cot (x + 10^0) = tan (90^0- x – 10^0) = tan (80^0 – x) . Phương trình (3) thành :

tan(2x + 110^0) = tan (80^0—x)

⇔ 2x + 110^0 = 80^0- x + k180^0 ⇔ x = - 10^0 + k.60^0

So điều kiện : $80^0-x\neq 90^0+k.180^o <=> 80^o-(-10^0+k.60^0)\neq 90^0+m.180^0$

$<=> -k.60^0\neq m.180^0 <=> k\neq -3m$

k không phải bôi số của 3 ⇔ k = 3m + 1 hay k = 3m + 2. Vậy nghiệm là x = - 10^0 + k.60^0 với k nguyên và k = 3m + 1 hay k = 3m + 2

d)Ta có : cot (72^o – x) = tan (x + 18^o) (góc phụ) nên phương trình (4) thành :

tan (x + 18^o) = 2 ⇔ x + 18^0 = arctan2 + k.180^0

⇔ x = arctan2 - 18^0 + k.180^0

(arctan2 ≃ 63^o 26’).

Ví dụ 2 : Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khỏang đã cho :

$a)\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$ (1) $(-\pi<x<\pi)$

$b)3\cos x=\sin(x+90^o)-1$ (2) $(0^o<x<360^o)$

Giải :

$$a)(1) \Leftrightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3}) = \sin(-x-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{3} = -x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi + x + \frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3} \quad (a) \\ x = \frac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (b) \end{array}\right.$$

$$-\pi < x < 3\pi : (a)\, cho: -\pi < \frac{-\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < k < \frac{7}{4}$$

$Suy\, ra: k = -1, 0, 1 \; (do\; k \in Z)$

Tương tự : (b) cho : k = 0 . Tóm lại , phương trình (1) có các nghiệm là : $-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$

b) Ta có : sin (x + 90^o) = cosx nên :

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos 120^o \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -120^0 + k360^o \\ x = 120^o + k360^o \end{array}\right.$$

$Do\;\; 0^0 < x < 360^o : x = \pm 120^0$

Dạng toán 3 : **Phương trình đưa về dạng cơ bản**

Sử dụng các công thức lượng giác như công, nhân, biến đổi , ta có thể đưa một số phương trình lượng giác về dạng cơ bản .

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

$a) \sin x + \cos x - 1 = 0 \quad (1)$ $\qquad b) 2\sin^2(x+\frac{\pi}{5}) = \cos(2x+\frac{2\pi}{5}) \; (2)$

$c) 4\sin 5x \cos 3x \cos 2x = 1 + \sin 6x + \sin 4x \; (3)$

$d) \left[\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \cos(x+\frac{\pi}{4})\right]^2 = 1 - \cos(2x - \frac{7\pi}{6}) \; (4)$

Giải :

$$a)(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\pi/4 = \pi/4 + k2\pi \\ x + \pi/4 = \pi - \pi/4 + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pi/2 + k2\pi \end{array}\right.$$

$$b)(2) \Leftrightarrow 1 - \cos(2x+\frac{2\pi}{5}) = \cos(2x+\frac{2\pi}{5}) \;\; (do\; 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x+\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{5} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\pi/30 + k\pi \\ x = -11\pi/30 + k\pi \end{array}\right.$$

$$c)(3) \Leftrightarrow 2(\sin 8x + \sin 2x)\cos 2x = 1 + \sin 6x + \sin 4x \quad (do\; 2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\Leftrightarrow \sin 10x + \sin 6x + \sin 4x = 1 + \sin 6x + \sin 4x \Leftrightarrow \sin 10x = 1$$

$$\Leftrightarrow 10x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}$$

$$d)(4) \Leftrightarrow \left[2(\sin(x+\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}))\right]^2 = 1 - \cos(2x - \frac{7\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos(x+\frac{\pi}{4})\right]^2 = 1 - \cos(2x - \frac{7\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=1-\cos(2x-\frac{7\pi}{6})\,(do\sin a\cos b+\sin b\cos a=\sin(a+b))$$

$$\Leftrightarrow 2\left[1-\cos(2x+\frac{5\pi}{6})\right]=1-\cos(2x-\frac{7\pi}{6})\,(do\,2\sin^2 a=1-\cos 2a)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x+\frac{5\pi}{6})=1\,(do\cos(2x-\frac{7\pi}{6})=\cos(2x+\frac{5\pi}{6}-2\pi)=\cos(2x+\frac{5\pi}{6}))$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{5\pi}{6}=k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$$

Ví dụ 2 : Giải các phương trình sau :

$a)2\cos 3x\cos x+1=2\sin3x\sin x$ (1) $\quad b)2\sin x\cos^2 x=\cos 2x(1+\sin x)$ (2)

$c)\sin4x\cos 3x=\sin x\cos 6x$ (3) $\quad d)\cos 3x+\cos 7x=\sin2x-\sin 8x$ (4)

Giải:

$a)(1)\Leftrightarrow 2(\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x)=1\Leftrightarrow 2\cos 4x=1$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}=cos60^0 \Leftrightarrow 4x=\pm 60^0+k360^0 \Leftrightarrow x=\pm 15^0+k90^0$$

$b)(2)\Leftrightarrow (2\sin x\cos x)\cos x=\cos 2x+\cos 2x\sin x\Leftrightarrow \sin 2x\cos x=\cos 2x+\cos 2x\sin x$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x)=\cos 2x\Leftrightarrow \cos 2x=\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\pi/2-x+k2\pi\\2x=-\pi/2+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi/6+k.2\pi/3\\x=-\pi/2+k2\pi\end{array}\right.$$

$c)(3)\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 7x+\sin x)=\frac{1}{2}(\sin 7x+\sin(-5x))\Leftrightarrow \sin5x=\sin(-x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=-x+k2\pi\\5x=\pi+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi/3\\x=\pi/4+k\pi/2\end{array}\right.$$

$d)(4)\Leftrightarrow 2\cos 5x\cos 2x=2\cos 5x\sin(-3x)\Leftrightarrow \cos 5x(\cos 2x-\sin 3x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x=0\\\cos 2x=\sin 3x\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=\pi/2+k\pi\\2x=\pi/2-3x+k2\pi\\2x=-\pi/2+3x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi/10+k\pi/5\\x=\pi/10+k.2\pi/5\\x=\pi/2-k2\pi\end{array}\right.$$

Ví dụ 3 : Giải các phương trình sau :

$a)\ \dfrac{\tan x+1}{1-\tan x}=\dfrac{2(1+\cot^2 2x)}{\cot 2x}\quad (0<x<90^0)$ (1) $\quad b)\ \sin^2(x-\dfrac{\pi}{6})=\cos^2 3x$ (2)

$c)\ (\sin2x+\cos 2x))^2=2\cos^2 3x$ (3) $\quad d)\ \sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{5}{8}\ (90^o<x<270^o)$ (4)

$$a)(1)=>\ \frac{\tan x+\tan 45^0}{1-\tan x\tan 45^0}=\frac{1+\dfrac{1}{\tan^2 x}}{\dfrac{2}{\tan x}}<=>\tan(x+45^0)=\frac{1+\tan^2 x}{2\tan x}$$

$$<=>\tan(x+45^0)=\frac{1}{\tan 2x}<=>\tan(x+45^0)=\tan(90^0-2x)$$

$$<=>x+45^0=90^0-2x+k.180^0<=>x=15^0+k.60^0$$

Do $0 < x < 90^0$, ta được $x_1 = 15^0$ và $x_2 = 75^0$

Thế 2 giá trị này vào phương trình ban đầu, ta thấy cả hai giá trị đều làm phương trình có nghĩa. Vậy phương trình có 2 nghiệm là 15^0 và 75^0 .

$$b)(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-\cos(2x-\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2}(1+\cos 6x) \Leftrightarrow \cos 6x = -\cos(2x-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{4\pi}{3}-2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 4\pi/3 - 2x + k2\pi \\ 6x = -4\pi/3 + 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/6 + k\pi/4 \\ x = -\pi/3 + k\pi/2 \end{array}\right.$$

(theo đề bài ta phải sử dụng đơn vị đo góc là độ)

$$c)(3) \Leftrightarrow (\sin 2x + \cos 2x)^2 = 2\cos^2 3x \Leftrightarrow 1 + 2\sin 2x \cos 2x = 2\cos^2 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 2\cos^2 3x - 1 = \cos 6x \Leftrightarrow \cos 6x = \cos(\frac{\pi}{2} - 4x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \pi/2 - 4x + k2\pi \\ 6x = -\pi/2 + 4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/20 + k\pi/5 \\ x = -\pi/4 + k\pi \end{array}\right.$$

$$d)(4) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{4}(1-\cos 4x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} = \cos 120^o \Leftrightarrow 4x = \pm 120^o + k360^o \Leftrightarrow x = \pm 30^o + k90^o$$

- Với nghiệm $x = 30^o + k90^o$ và $90^o < x < 270^o$ ta chọn k = 0 , 1 , 2 và được các nghiệm là: $x = 30^o$; $x = 120^o$; $x = 210^o$.
- Với nghiệm $x = -30^o + k90^o$ và $90^o < x < 270^o$ ta chọn k = 1 , 2 , 3 và đươc các nghiệm là $x = 60^o$; $x = 150^o$; $x = 240^o$.

Ví dụ 4* : Giải phương trình : $\dfrac{2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x}{(\sin x - \cos x)\sin 2x} = 0$

Giải :

Điều kiện để phương trình có nghĩa : $\begin{cases} \sin x - \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Phương trình cho tương đương phương trình sau :

$$2\sin^2 x + \cos 4x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right.$$

- Với cos2x = 1 thì sin2x = 0 nên không thỏa điều kiện .
- Với cos2x = 0 , ta có :

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \,(do \cos x - \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Nghiệm này thỏa điều kiện của phương trình nên là nghiệm của phương trình .

Ví dụ 5* : Giải các phương trình sau :

$$a)\ 8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\ (1)$$

$$b)\ \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}\ (2)$$

Giải :

a) Điều kiện để phương trình có nghĩa : $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x.\cos x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x \Leftrightarrow 4\sin 2x\sin x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos x - \cos 3x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x \quad (do\, 2\sin a.\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos(x+\pi/3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + \pi/3 + k2\pi \\ 3x = -x - \pi/3 + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/6 + k\pi \\ x = -\pi/12 + k\pi/2 \end{array}\right.$$

Các nghiệm này hiển nhiên thỏa điều kiện nên là nghiệm của phương trình .

$$b)(2) \Leftrightarrow \frac{(\sin 3x + \sin x) + \sin 2x}{(\cos 3x + \cos x) + \cos 2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2\sin 2x\cos x + \sin 2x}{2\cos 2x\cos x + \cos 2x} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(2\cos x + 1)}{\cos 2x(2\cos x + 1)} = \sqrt{3}$$

Điều kiện để phương trình có nghĩa :

$$\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ 2\cos x + 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ cosx \neq -\dfrac{1}{2}\end{cases} <=> \begin{cases} x \neq \pi/4 + m.\pi/2 & (a)\\ x \neq \pm 2\pi/3 + m.2\pi & (b)\end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi (*) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

So điều kiện :

- $2x = \pi/3 + k\pi \Rightarrow \cos 2x = \pm ½$ thỏa điều kiện (a) ⇔ $\cos 2x \neq 0$
- $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \neq \pm\dfrac{2\pi}{3} + m.2\pi <=> \begin{cases}1+3k \neq 4+12m\\ 1+3k \neq -4+12m\end{cases} <=> \begin{cases}k \neq 4m+1\\ k \neq -5/3 + 4m \ (thoả\ vì\ k, m \in Z)\end{cases}$

  ⇔ k = 4m, k = 4m + 2, k = 4m + 3

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \pi/6 + k\pi/2$ với k nguyên và k = 4m, k = 4m + 2, k = 4m + 3.

C . Bài tập rèn luyện .

1.8 . Giải các phương trình sau :

$a) 2\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -1$ (1) $\quad b)\sin(3x - 14^o) + \cos(x + 24^o) = 0$ (2)

$c)\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ (3) $\quad d)\cos(2x - 12^o) + \sin(102^o - 2x) = -1$ (4)

$e)\tan(3x - \frac{\pi}{6}) + \cot(\frac{2\pi}{3} - 3x) = 1$ (5) $\quad f)\tan(x - 12^o).\cot(2x + 34^o) = 1$ (6)

1.9 . Định m để các phương trình sau có nghiệm :

a) mcosx = - m +2 . b) $\cos 3x\cos x - \cos^2 x = m$. c) $\tan x = \dfrac{2m^2 + m + 5}{m - 3}$

1.10 . Tìm nghiệm của các phương trình sau trên các khoảng đã cho :

$a)\cos(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}(1)\ (-\pi<x<0)$

$b)\tan(2x-14^o)=\sqrt{3}\ (2)(0^o<x<200^o)$

1.11 . Giải các phương trình sau :

$a)\cos x\cos 4x=\cos 2x\cos 3x$ $\qquad b)\sin^3 x\cos x=\frac{1}{4}+\cos^3\sin x$

$c)\cos 10x+2\cos^2 4x=\cos x+2\cos x\cos 9x$ $\qquad d)\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{8}\quad(0<x<40^0)$

D . Hướng dẫn – Đáp số .

$$1.8.a)(1)\Leftrightarrow\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\pi}{6})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

$b)(2)\Leftrightarrow\sin(3x-14^o\ )=\sin(x-66^o)$

$c)(3)\Leftrightarrow\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{2\pi}{3}-x)$

$d)(4)\Leftrightarrow\cos(2x-12^o)=\cos 120^o$

$e)(5)\Leftrightarrow\tan(3x-30^o)=\tan 26^o34'$

$f)(6)\Leftrightarrow 2x+34^o=x-12^o+k180^o\ (x\neq 102^o+m180^o)$

$\Leftrightarrow x=-36^0+k.180^0$

1.9 .

$a)\ m^2\geq(m-2)^2 <=> m\geq 1$

$b)\ \frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)-\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=m <=> \cos 4x=2m+1$

$-1\leq 2m+1\leq 1 <=> -1\leq m\leq 0$

$c)\ m\neq 3$

1.10 .a) (1) có các nghiệm là : $-\frac{19\pi}{24};-\frac{11\pi}{24}$

b) (2) có nghiệm là :37^o ; 127^o .

1.11 . a) cos3x = cosx b) sin4x = - 1 c) cosx = 1

d) $0 < x < 40^0$ => sinx $\neq$ 0. Nhân hai vế cho sin x , phương trình thành:

sin8x = sinx ⇔ <=> $\left[\begin{array}{l}x=\frac{k.360^0}{7}\\x=20^0+k.40^0\end{array}\right.$. Nghiệm là 20^0.

2. Một số dạng phương trình lượng giác khác

A . Tóm tắt giáo khoa .

I . Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác :

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$; $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$; $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$

Cách giải :

- Đặt t = sinx , cosx, tanx, cotx, ta được phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$ (Với t = sinx , cosx thì điều kiện: $|t| \le 1$)
- Giải phương trình để tìm t thoả điều kiện , nếu có.
- Suy ra x.

2 . Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx : asinx + bcosx = c

Cách giải :

- Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
- Gọi α là góc mà $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \end{cases}$: $\cos(x - \alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- Nếu $a^2+b^2 \ge c^2$: $\cos(x - \alpha) = \arccos(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}})$ (dạng cơ bản)

❖ Phương trình asin x + bcos x = c có nghiệm ⇔ $a^2+b^2 \ge c^2$

3 . Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cos x : Đó là những phương trình có dạng
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d = 0$.

`

Cách giải 1 :

- Xét $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ⇔ cos x = 0 : Thế vào PT, xem nó có phải là nghiệm của phương trình hay không ?
- Xét t $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ⇔ cosx $\ne 0$: Chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được một phương trình bậc hai theo t = tanx . Nhớ : $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Giải để tìm t, suy ra x.

Cách giải 2 :

- Thế $\cos^2 x = ½ (1 + \cos2x)$, $\sin^2 x = ½ (1 – \cos2x)$ và sinx cos x = ½ sin2x , ta đưa phương trình về dạng Asin2x + Bcos2x = C.
- `Giải theo cách đã biết.

B . Giải tóan :

Dạng tóan 1 : **Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác** .

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

$a) 4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$ (1) $b) \sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x = \cos 4x + \frac{5}{4}$ (2)

$c) \sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\sin x\cos 2x$ (3) $d) \sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$ (4)

Giải :

c) Đặt t = cosx , phương trình (3) thành :

$4t^2 - 2(1+\sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 (*) ; \Delta' = (1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$b) (2) \Leftrightarrow \sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \cos 8x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\sin 4x = \cos 8x + \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\sin 4x = 1 - 2\sin^2 4x + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 8\sin^2 4x - \sin 4x - 9 = 0$$

$<=> \sin 4x = -1$ *hay* $\sin 4x = -9/8 (l)$

$\Leftrightarrow$ 4x = - π/2 + k.2π $\Leftrightarrow$ x = - π/8 + k π/2

$$c) (3) \Leftrightarrow \sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = \sin 3x + \sin(-x) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi ; x = \pi/3 + k.2\pi ; x = 2\pi/3 + k.2\pi$$

$$d) (4) \Leftrightarrow (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x = \frac{17}{16}(1 - \sin^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^4 2x + \sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = -1 (l) \\ \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

Ví dụ 2 : Giải các phương trình sau :

$a) \frac{(3+2\sin x)\cos x - (1+\cos^2 x)}{1+\sin 2x} = 1$ (1)

$b) 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$ (2)

Giải :

Điều kiện : $1 + \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow (3+2\sin x)\cos x - (1+\cos^2 x) = 1 + \sin 2x$

$$\Leftrightarrow 3\cos x + \sin 2x - 1 - \cos^2 x = 1 + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = 2\,(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k2\pi$$

Nghiệm này thỏa điều kiện của phương trình nên nhận được

b) Điều kiện để phương trình có nghĩa : cosx $\neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$(2) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = 2\,(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/6 + k2\pi \\ x = 5\pi/6 + k2\pi \end{array}\right.$$

Các họ nghiệm này thỏa điều kiện nên nhận được .

***Ví dụ 3** : Giải các phương trình sau :

$a)\tan^2 x + 4\cot^2 x + 7 = 4\tan x + 8\cot x$ (1) $\quad b)\tan x + \cot x + 7 = \cot^2 2x\,(2)$

$c)6\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin 2x = 14\sin(x - \dfrac{\pi}{6}) - 5$ (3)

$d)\cos(2x + \dfrac{2\pi}{3}) + 4\cos(\dfrac{\pi}{6} - x) = \dfrac{5}{2}$ (4)

Giải :

a) Điều kiện : sinxcosx $\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq m\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{m\pi}{2}$

Đặt t = tanx + 2cotx , ta có : $t^2 = \tan^2 x + 4\cot^2 x + 4$ (vì tanx.cotx = 1)

Phương trình (1) thành :

$$(t^2 - 4) + 7 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

- Với t = 1 , ta có phương trình : $u + \dfrac{2}{u} = 1\,(u = \tan x) \Leftrightarrow u^2 - 2u + 2 = 0\,(vn)$
- Với t = 3 , ta có phương trình :

$$u + \frac{2}{u} = 3 \Leftrightarrow u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ tgx = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{array}\right.$$

Các nghiệm này nhận được vì thỏa điều kiện ở trên .

b) Điều kiện : $\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{m\pi}{2}$

Ta cơ :

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x};\cot^2 2x = \frac{1}{\sin^2 2x} - 1$$

Phương trình (2) thành :

$$2t + 7 = t^2 - 1\ (t = \frac{1}{\sin 2x}\ ;|t| \geq 1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 4 \end{array}\right.$$

* $t=-2 \Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\pi/6+k2\pi \\ 2x=7\pi/6+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\pi/12+k\pi \\ x=7\pi/12+k\pi \end{array}\right.$

* $t=4 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{4}=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\alpha+k2\pi \\ 2x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\alpha}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi-\alpha}{2}+k\pi \end{array}\right.$

$c)\sin(x-\frac{\pi}{6})=\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)$

$VT=2(3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x)=2(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2$

Phương trình (3) thành :

$8t^2=14t-5\left[t=\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)\right] \Leftrightarrow 8t^2-14t+5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{5}{4}(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\pi/6=\pi/6+k2\pi \\ x-\pi/6=\pi-\pi/6+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi/3+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$

d)Ta có : $\cos(\frac{\pi}{6}-x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})=t;\cos(2x+\frac{2\pi}{3})=\cos 2(x+\frac{\pi}{3})=1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{3})=1-2t^2$

Phương trình (4) thành :

$1-2t^2+4t=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 4t^2-8t+3=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\ (t=\frac{3}{2}(l))$

$t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$

Dạng tóan 2 : **Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx** .

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :
$a)\sin 2x-\cos 2x=-\sqrt{2}$ (1) $b)\sqrt{2}\sin 3x+\sqrt{6}\cos 3x=2$ (2)
c) $6\sin^2 x-8\sin x\cos x=5,5$ (3)

Giải :

$a)(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{4})=-1$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$

$b)(2) \Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin 3x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(3x+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ 3x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$$

c) (3) ⇔ 3(1 – cos2x) – 4sin2x = 5, 5 ⇔ 3cos2x + 4sin2x = - 2, 5

Chia hai vế cho $\sqrt{3^2+4^2}=5$ *và gọi* $\alpha = arc\cos(3/5)$: cos 2xcos α + sin2xsin α = - ½

⇔ cos(2x - α) = cos2 π /3 ⇔ x = α /2 ± π /3 + k π

> **Ví dụ 2** : Định m để các phương trình sau có nghiệm
> $a) m\sin x-(m-1)\cos x=3-2m$ (1) $b) m\sin x\cos x+\sin^2 x=m$ (2)

Giải :

a) Phương trình (1) có nghiệm khi :

$$m^2+(m-1)^2 \ge (3-2m)^2 \Leftrightarrow 2m^2-10m+8\le 0 \Leftrightarrow 1\le m\le 4$$

$$b)(2) \Leftrightarrow \frac{m}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=m \Leftrightarrow m\sin 2x-\cos 2x=2m-1$$

(2) có nghiệm khi : $m^2+1\ge(2m-1)^2 \Leftrightarrow 3m^2-4m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{4}{3}$

> **Ví dụ 3** : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau :
> a) $y=\dfrac{3\sin x+\cos x}{\cos x+3}$ (1) b) $y=\dfrac{3\sin^2 x+3\sin 2x}{2\sin^2 x+\cos^2 x+1}$ (2)

Giải

a) Tập xác định là R.

Viết lại (1) : 3sinx + cosx = y(cosx + 3) ⇔ 3sinx + (1 – y)cosx = 3y (*)

Tập giá trị của hàm số là tập hợp những giá trị y sao cho tồn tại x thỏa (*) tức (*) có nghiệm x

⇔ $3^2 + (1 – y)^2 \ge (3y)^2$ ⇔ $8y^2 + 2y – 10 \le 0$

⇔ - 5/4 ≤ y 1.

Vậy GTNN là – 5/4 và GTLN là 1.

b) Tập xác định là R.

Viết lại (2) : $3\sin^2 x + 3\sin 2x = y(2 + \sin^2 x)$ ⇔ $\dfrac{3}{2}(1-\cos 2x)+6\sin 2x = y\left(2+\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)$

⇔ 3(1 – cos 2 x) + 6sin 2x = y(5 – cos 2x)

⇔ (y – 3)cos 2x + 6sin2x = 5y – 3(**)

Tập giá trị của hàm số là tập hợp những giá trị y sao cho tồn tại x thỏa (**) tức (**) có nghiệm x

⇔ $(y – 3)^2 + 6^2 \ge (5y – 3)^2$ ⇔ $2y^2 – 2y – 3 \le 0$

⇔ $\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\le y\le \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Vậy GTLN là $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ và GTNN là $\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$

Dạng tóan 3 : **Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx**

> **Ví dụ 1** : Giải các phương trìnhsau
> $a)\ 4\sin^2 x-5\sin x\cos x+3\cos^2 x=1$ (1)
> $b)\ 4\sqrt{3}\sin^2 x\cos^2 x-2(1+\sqrt{3})\sin x\cos x\cos 2x+\cos^2 2x=0$ (2)

Giải :

a)

* Thế x = $\pi/2 + k\pi$: 4. 1 – 5. 0 + 0 = 1 (sai)

* Với x $\neq$ $\pi/2 + k\pi$: Chia hai vế cho cosx $\neq$ 0

$$(2) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x + 3 = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow 3\tan^2 x - 5\tan x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(2/3) + k\pi \end{array}\right.$$

$b)(2) \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^2 2x - (1+\sqrt{3})\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 0$. (cos2x = 0 không phải là nghiệm của (1) vì khi đó vế trái bằng $\sqrt{3}$ $(do\sin^2 2x = 1)$.

$$\cos 2x \neq 0; (1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^2 2x - (1+\sqrt{3})\tan 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi/4 + k\pi \\ 2x = \pi/6 + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/8 + k\pi \\ x = \pi/12 + k\pi/2 \end{array}\right.$$

Ví dụ 2 : Giải phương trình : $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ bằng cách đưa về phương trình bậc nhất đối với sin2x và cos2x .

Giải :

Phương trình cho tương đương phương trình sau :

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 2.\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \pi/6 = \pi/4 + k2\pi \\ 2x + \pi/6 = 3\pi/4 + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/24 + k\pi \\ x = 7\pi/24 + k\pi \end{array}\right.$$

Ghi chú: Nếu giải theo cách 1 thì ta được phương trình

$$\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x + 2 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)\tan x - 2\sqrt{3}\tan x + \sqrt{2} - 1 = 0$$

Nghiệm của phương trình này không được "đẹp" chút nào! Bạn hảy giải thích tại sao thường thì giải cách 2 cho ta nghiệm " đẹp" hơn.

Dạng tóan 4 : Phương trình lượng giác dạng tích

Nếu phương trình có thể đưa về dạng: f(x). g(x) = 0 thì nó tương đương với : f(x) = 0 hay g(x) = 0

Các công thức hạ bậc, nhân và biến đổi có thể giúp đở làm xuất hiện nhân tử chung, bước cơ bản để đưa được về dạng tích.

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

a) 2sin2 x + 5cosx = 0 (1) b) cos x + sinx = cos2x (2)

c) $\sin^2$ x + $\sin^2$ 3 x = $\sin^2$ 4 x (3) d) 1 + cosx + sinx + sin2x + cos2x = 0 (4)

Giải :

a) (1) $\Leftrightarrow$ 4sinxcosx + 5cosx = 0 $\Leftrightarrow$ cosx(4sinx + 5) = 0 $\Leftrightarrow$ cos x = 0 hay sinx = - 5/4 (loại)

$\Leftrightarrow$ x = $\pi/2 + k\pi$

$b)(2) \Leftrightarrow \cos x + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\pi/4 + k\pi \\ x + \pi/4 = \pm\pi/4 + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\pi/4 + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\pi/2 + k2\pi \end{array}\right.$$

c) (3) $\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1 - \cos^2 4x \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 2x - 2\cos^2 4x$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x - 2\cos^2 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x(\cos 2x - \cos 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x.\ \sin x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $\sin 3x = 0$ hay $\cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi$ hay $x = k\pi/3$ hay $x = \pi/8 + k\pi/4$

$d)(4) \Leftrightarrow (1 + \cos 2x) + \cos x + \sin x + (\sin 2x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos^2 x + \cos x) + (\sin x + 2\sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1) + \sin x(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1/2 = \cos 2\pi/3 \\ \sqrt{2}\sin(x + \pi/4) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2\pi/3 + k2\pi \\ x = -\pi/4 + k\pi \end{array}\right.$$

***Ví dụ 4** : Giải các phương trình sau :

$a)\ \tan 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\cot x$ (1) $\qquad b) 2\tan x + \cot 2x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}$ (2)

Giải :

a)Điều kiện để phương trình (1) có nghĩa : $\begin{cases} \cos 2x \neq 0\,(*) \\ \sin x \neq 0\,(**) \end{cases}$.

Phương trình (1) thành :

$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \sin 2x = \frac{3}{2}.\frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \cos 2x)\sin x = 3\cos 2x\cos x$

$\Leftrightarrow 4\sin 2x\cos^2 x\sin x - 3\cos 2x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 2x\cos x - 3\cos 2x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin^2 2x - 3\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 - 2\cos^2 2x - 3\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$; $\cos 2x = \frac{1}{2}$; $\cos 2x = -2\,(l)$

- Với cosx = 0 hiển nhiên (*) và (**) thỏa (vì khi đó $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1$; sinx = 1 hay sinx = -1)

Vậy nghiệm là : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- Với $\cos 2x = \frac{1}{2}$, hiển nhiên (*) thỏa ; (**) cũng thỏa vì khi đó :

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1 - 1/2}{2} = 1/4 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1/2$

Và $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

Tóm lại , (1) có nghiệm là : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

b) Điều kiện để phương trình (2) có nghĩa : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \cos x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x = 8\sin^2 x\cos^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - 4\cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4\cos^2 x = 0\,(do \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Nghiệm này hiển nhiên thỏa điều kiện nên nhận được .

C . Bài tập rèn luyện .

1.12 . Giải các phương trình sau :

$a)\cos x\cos 4x = \cos 2x\cos 3x$ $\quad$ $b)\sin^3 x\cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x\sin x$

$c)\cos 10x + 2\cos^2 4x = \cos x + 2\cos x\cos 9x$ $\quad$ $d)\cos x\cos 2x\cos 4x = \frac{1}{8}\ \ (0 < x < \pi/4)$

1.13 . Giải các phương trình sau :

$a)\sin x + \cos x + \sin 2x + 2\cos^2 x = 0$ $\quad$ $b)\sin^6 x + \cos^6 x = 2(\sin^8 x + \cos^8 x)$

$c)\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(\frac{21\pi}{2} + 10x)$ $\quad$ $d)\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\cot(x + \frac{\pi}{3})\cot(\frac{\pi}{6} - x)$

1.14 . Giải các phương trình sau :

$a)\tan x + \cot x = 2(2 + \sin 2x)$ $\quad$ $b)3\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x = 0$

$c)\sin^4 x + \cos^4 x + \cos(x - \frac{\pi}{4})\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \frac{3}{2} = 0$ $\quad$ $d)\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

1.15 . Giải các phương trình sau :

a) sinx + sin2x + sin3x = cosx + cos2x + cos3x $\quad$ b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$

c) (2sinx + 1) (2sin2x – 1) = 3 – $4\cos^2 x$ $\quad$ d) $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

1.16 . Giải các phương trình sau :

$a)\sin^2 x(1 + \tan x) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$ $\quad$ $b)4(\cos^4 x + \sin^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$c)\sqrt{3}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad$ $d)2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

1.17 . Giải các phương trình sau :

a) (2cosx – 1) (2sinx + cosx) = sin2x – sinx (thi tuyển đại học 2004)

b) $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ (thi tuyển đại học 1996)

c) $\tan^3(x - \frac{\pi}{4}) = \tan x - 1$ (thi tuyển đại học 1999)

d) $8\cos^3(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 3x$ (thi tuyển đại học 1999)

1.18. Giải các phương trình sau :

$a)\sin^3(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin x$ $b)\sin(3x-\frac{\pi}{4})=\sin 2x\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$c)\tan 4x+\tan x=2\tan 3x$ $d)2\sin 3x-\frac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\frac{1}{\cos x}$

D . Hướng dẫn - Đáp số .

1.12 . a) cos3x = cosx b) sin4x = - 1
c) cosx = 1
d) sinx $\neq$ 0, nhân hai vế cho sinx, phương trình thành sin8x = sinx .

1.13 . a) (sinx + cosx)(2cosx + 1) = 0 b) cos2x ($\cos^6$x – $\sin^6$x) = 0
c) cos10x (2cosx + 1) = 0
d) Điều kiện là : $\sin(x+\frac{\pi}{3})\cos(x+\frac{\pi}{3})\neq 0$
Phương trình thành cos4x = 0,5

1.14 . a) Điều kiện là : $\sin x\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0$. Phương trình thành :
$\frac{1}{\sin 2x}=2+\sin 2x\Leftrightarrow \sin^2 2x+2\sin 2x-1=0\Leftrightarrow \sin 2x=-1+\sqrt{2}$
b) Phương trình thành : $2\cos^2 2x + \cos 2x = 0$. Nghiệm là : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$
c) Phương trình thành : $3\sin^2 2x - \sin 2x = 0$.
d) Điều kiện để phương trình có nghĩa : sin2x $\neq 0$. Phương trình thành :
$\sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x (\cos 2x + \sin 2x) = 0$.
Nghiệm là : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$
1.15 . a) Phương trình thành : 2sin2xcosx + sin2x = 2cos2xcosx +cos2x
$\Leftrightarrow$ (2cosx + 1) (sin2x - cos2x) = 0 .
b) Phương trình thành : 1 – cos2x + 1 – cos4x + 1 – cos6x = 3
$\Leftrightarrow$ cos4x (2cos2x + 1) = 0 .
c) Phương trình thành : (2sinx + 1) (2sin2x – 1) = 3 – 4(1 – $\sin^2$x) = 4$\sin^2$x—1
$\Leftrightarrow$ (2sinx + 1) (2sin2x –1 – 2sinx + 1) = 0 $\Leftrightarrow$ (2sinx + 1) sinx (2cosx – 1) = 0 .
d) Điều kiện: sin2x $\neq 0$. Phương trình thành :

$$\sin^2 2x(1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x})=1-\cos 2x\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x=1-\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x-\sin 2x-1)=0$$

Phương trình có nghiệm là : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=k\pi\,(l)$

1.16 . a) Điều kiện cosx $\neq 0$. Chia hai vế cho $\cos^2$x , ta có :
$t^2(1 + t) = 3t (1 – t) + 3 (1 + t^2)$ (t = tanx)
$\Leftrightarrow$ (t – 1) (t^2—3) = 0 . Nghiệm là : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$
b) Phương trình thành :

$$4(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)+\sqrt{3}\sin 4x=2\Leftrightarrow 4\left[1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)\right]+\sqrt{3}\sin 4x=2\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x=-1\Leftrightarrow \sin(4x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

c) Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế cho cosx , ta có :

$$\sqrt{3}\tan x + 1 = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan x(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ tanx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

Các nghiệm này thỏa điều kiện của phương trình nên nhận được

d) Phương trình thành : - sinx (1 – 2sin^{2}x) = cosx (2cos^{2}x – 1) + cos2x

⇔ cos2x (sinx + cosx + 1) = 0 . Nghiệm là : $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi$

1.17 . a) Phương trình thành : (2cosx – 1) (2sinx + cosx) = sinx (2cosx – 1)

⇔ (2cosx – 1) (sinx + cosx) = 0 .

b) Phương trình cho thành :

$$\left[2\left(\sin 2x.\frac{1}{2} + \cos 2x.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 - 5 = \cos(2x - \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow 4t^2 - t - 5 = 0 \ (t = \cos(2x - \frac{\pi}{6}))$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \cos(2x - \frac{\pi}{6}) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

c) Đặt t = x - $\dfrac{\pi}{4}$, phương trình thành :

$$\tan^3 t = \tan(t + \frac{\pi}{4}) - 1 = \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t} - 1 = \frac{2\tan t}{1 - \tan t} \Leftrightarrow \tan t(-\tan^3 t + \tan^2 t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan t(\tan t + 1)(-\tan^2 t + 2\tan t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan t = 0 \\ \tan t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = +k\pi \end{array}\right.$$

d) Đặt t = x + $\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = t - \dfrac{\pi}{3}$, phương trình thành :

$$8\cos^3 t = \cos(3t - \pi) = -\cos 3t = -4\cos^3 t + 3\cos t \Leftrightarrow \cos t(4\cos^2 t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 0 \ hay \cos t = \pm 1/2$$

1.18.

a) Đặt t = x - $\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \dfrac{\pi}{4}$, phương trình thành :

$$\sin^3 t = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) = \sin t + \cos t \Leftrightarrow \sin t(1 - \sin^2 t) + \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin t\cos^2 t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t(\frac{1}{2}\sin 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0\,(\sin 2t = -2(l))$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

b) Đặt $t = x + \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = t - \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 2x = \sin(2t - \dfrac{\pi}{2}) = -\cos 2t; \sin(3x - \dfrac{\pi}{4}) = \sin(3t - \pi) = -\sin 3t$

Phương trình thành : sin3t = sintcos2t hay sin (t + 2t) = sintcos2t

⇔ sintcos2t + sin2tcost = sintcos2t ⇔ sin2tcost = 0⇔ 2sintcos^{2}t = 0 .

c)Điều kiện : $\cos x \neq 0$; $\cos 3x \neq 0$; $\cos 4x \neq 0$

$$PT \Leftrightarrow \tan 4x - \tan 3x = \tan 3x - \tan x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos 4x\cos 3x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x=\sin 2x\cos 4x \Leftrightarrow \sin 2x(1-2\cos 4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\,(*)\\ \cos 4x=\dfrac{1}{2}\,(**)\end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow \sin x=0\,(do\cos x\neq 0) \Leftrightarrow x=k\pi$

$(**) \Leftrightarrow \cos 4x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$

- Với nghiệm $x=k\pi$, hiển nhiên các điều kiện thỏa (vì $\cos k\pi\neq 0;\cos 3k\pi\neq 0;\cos 4k\pi\neq 0)$
- Với nghiệm $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$, điều kiện $\cos 4x\neq 0$ hiển nhiên thỏa vì cos4x = 0,5 .

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k'\pi \Leftrightarrow \pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k'\pi \Leftrightarrow \pm 1+6k\neq 6+12k'$ hiển nhiên thỏa vì vế trái là số lẻ còn vế phải là số chẵn .

Điều kiện $\cos 3x\neq 0 \Leftrightarrow 3x\neq\dfrac{\pi}{2}+k'\pi \Leftrightarrow \pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3k\pi}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+k'\pi \Leftrightarrow \pm 1+6k\neq 2+4k'$ hiển nhiên thỏa vì vế trái là số lẻ còn vế phải là số chẵn . Tóm lại , phương trình có các nghiệm là :

$x=k\pi$; $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$

d) Điều kiện : $\sin x\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k'\pi$

$$PT \Leftrightarrow (\sin 3x-\cos 3x)=\frac{\sin x+\cos x}{2\sin x\cos x} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(3x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x-\frac{\pi}{4})\sin 2x=\cos(x-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})-\cos(5x-\frac{\pi}{4})\right]=\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \cos(5x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow 2\cos(3x-\frac{\pi}{4})\cos 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos(3x-\dfrac{\pi}{4})=0\end{array}\right.$$

$(*)\cos 2x=0\,(\Rightarrow \sin 2x=\pm 1\neq 0) \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

$(**)\cos(3x-\dfrac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow 3x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}$

$(\Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{3}\,;\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k'\pi \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k2\pi}{3}\neq k'\pi \Leftrightarrow 3+4k\neq 6k')$

Điều kiện này hiển nhiên thỏa (3 + 4k) là số lẻ còn 6k' là số chẵn .Tóm lại nghiệm của phương trình (4) là : $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}$

Câu hỏi trắc nghiệm chương I .

A . Câu hỏi .

1 . Trong 4 hàm số dưới đây , có bao nhiêu hàm số là hàm số chẵn ?

y = cos3x (1) ; y = sin (x^2 + 1) (2) ; y = tg^2 (x) (3) ; y = cotgx (4) .

a) . 1 b) . 2 c) . 3 d) . 4

2 . Trong 4 hệ thức dưới đây , có bao nhiêu hệ thức sai ?

$\sin\frac{21\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$ (1); $\tan\frac{4\pi}{5}=\tan\frac{\pi}{5}$ (2); $\tan\frac{8\pi}{7}=\tan\frac{\pi}{7}$ (3); $\cos\frac{4\pi}{7}=\cos\frac{3\pi}{7}$ (4)

a) . 1 b) . 2 c) . 3 d). 4

3 . Cho 3 hàm số : y = f (x) = sin2x (I) ; y = f (x) = cosx (II) ; y = tanx (III) . Trong ba hàm số này , hàm số nào thỏa tính chất sau : $f(x+k\pi)=f(x),\forall x\in R;\forall k\in Z$

a) . Chỉ (I) b) , Chỉ (II) c) . Chỉ (III) d) . Chỉ (I) và (III) .

4 .Cho hàm số : y = sin2x , $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$. Tập giá trị của hàm số này là tập nào dưới đây ?

$a).\left[-\frac{1}{2},1\right]$ $b).\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ $c).\left[\frac{1}{2},1\right]$ d). một đáp số khác

5 . Cho hàm số y = $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+5$. Nếu M , m lần lượt là GTLN , GTNN của hàm số thì (M + m) bằng bao nhiêu ?

a) . 9 b) . 10 c) . 11 d) . một đáp số khác .

6 . Cho hàm số : y = $\cos^2$x + 4cosx + 10 . Nếu M , m lần lượt là GTLN , GTNN của hàm số thì (M + m) bằng bao nhiêu ?

a) . 19 b) . 21 c) . 23 d) . một đáp số khác

7 . Cho 3 hàm số : y = tan2x (I) ; y = cot2x (II) ; y = tanx (III) . Đồ thị của hàm số nào nhận đường thẳng $x=\frac{3\pi}{4}$ làm đường tiệm cận ?

a) . Chỉ (I) b) . Chỉ (II) c) . Chỉ (III) d) . Chỉ (I) và (III)

8 .Cho phương trình : sin5xcos3x = sin10xcos8x . Nếu ta biến đổi phương trình này về dạng sinax = sinbx thì (a + b) bàng bao nhiêu ?

a) . 20 b) . 22 c) . 24 d) . 26 .

9 . Phương trình $\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khỏang $(-\frac{\pi}{2},\pi)$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) một đáp số khác .

10 . Cho phương trình : sin (2x + 15^o) + cosx = 0 (0^o < x < 300^o) Nếu S là tổng tất cả các nghiệm (tính bằng độ) của phương trình này thì S bằng bao nhiêu ?

a) 355^o b) 455^o c) 555^o d) một đáp số khác .

11 . Cho phương trình : cos2x. cos4x + $4\cos^2$ x – 2 = 0 . Khi giải phương trình này bằng cách đưa về dạng tích A . B = 0 , ta được một họ nghiệm có dạng : $a+\frac{k\pi}{2}(k\in Z;0<a<\frac{\pi}{2})$ thế thì a bằng giá trị nào dưới đây ?

$a).\frac{\pi}{4}$ $b).\frac{\pi}{6}$ $c).\frac{\pi}{8}$ $d).\frac{\pi}{12}$

12 . Cho phương trình : $\sin^2 x-(1+\sqrt{3})\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$. Khi giải phương trình này bằng cách đưa về một phương trình bậc hai mà ẩn là tanx , ta được hai họ nghiệm có dạng : $a+k\pi;b+k'\pi\ (k,k'\in Z;0<a<\frac{\pi}{2};0<b<\frac{\pi}{2})$, thế thì (a + b) bằng bao nhiêu ?

$a).\frac{3\pi}{4}$ $b).\frac{3\pi}{8}$ $c).\frac{5\pi}{12}$ $d).\frac{7\pi}{12}$

13 . Cho phương trình : (2sinx + 1) (2 – 3sinx) = 3 – 4cos^{2}x . Khi giải phương trình này bằng cách đưa về dạng (asinx + b) (csinx + d) = 0 thì tỉ số $\frac{d}{c}$ bằng tỉ số nào dưới đây ?

$a).\frac{2}{3}$ $b).\frac{1}{3}$ $c).-\frac{3}{5}$ $d).\frac{3}{5}$

14 . Cho phương trình : 2msinxcosx + 4cos^{2}x = m +5 (1) ; m là một phần tử của tập hợp $E = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm ?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

15 . Cho phương trình :2sinx (cos2x + cos4x + cos6x) = sin7x + 1 . Dùng công thức biến đổi tích thành tổng , phương trình này sẽ thu gọn thành dạng : sin (ax) + b = 0 , thế thì (a + b) bằng bao nhiêu ?

a) 1 b) 2 c) 3 d) một đáp số khác

16 .Cho phương trình : cos5x + cos^{2}2x + cos^{2}3x – 1 = 0 . Khi giải phương trình này bằng cách đưa về dạng tích, ta được phương trình có dạng : cos (ax) (cosx + 1) = 0 , thế thì a bằng bao nhiêu ?

a) 2 b) 3 c) 4 d)một đáp số khác

17 . Cho phương trình : 2sin^{2}x – 3sinx – 2 = 0 . Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình này bằng bao nhiêu ?

$a).\frac{\pi}{6}$ $b).\frac{\pi}{3}$ $c).\frac{2\pi}{3}$ $d).\frac{7\pi}{6}$

18 .Cho phương trình : (1 – tanx) (1 + sin2x) = 1 + tanx (1) . Nếu đặt t = tanx thì phương trình (1) thành một phương trình có dạng nào dưới đây :

a) $t^3 + t^2 = 0$ b) $t^2 + 2t = 0$ c) $t^3 + 2t^2 = 0$ d) $2t^3 + t^2 = 0$

19 . Cho phương trình : sin (2x + 60^o) + cos (30^o-2x) = 1 . Nếu a là một nghiệm của phương trình này và $-90^o < a < 0^o$ thì (5sin^{2}2a + cos^{2}2a) bằng bao nhiêu ?

a) 1, 5 b) 2 c) 2, 5 d) 3

20 . Cho phương trình : 2 cos^{2}2x + 4(cos^{4}x + sin^{4}x) = 1 . Sử dụng các công thức lượng giác ta biến đổi phương trình này về dạng : acos4x + b = 0 . Thế thì (a + b) bằng bao nhiêu ?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

21 . Cho phương trình : (tanx – 1) (tan^{2}x - $\frac{4}{\sqrt{3}}$ tanx + 1) = 0 . Phương trình này có ba họ nghiệm là :

$x = a + k\pi ; x = b + k\pi ; x = c + k\pi \left[a,b,c \in (0,\frac{\pi}{2}); k \in Z \right]$. Thế thì :

(a + b + c) bằng bao nhiêu ?

$a).\pi$ $b).\frac{2\pi}{3}$ $c).\frac{3\pi}{4}$ $d).\frac{5\pi}{4}$

22 .Cho phương trình : 2 + 2(sin^{3}2x + cos^{3}2x) = 3sin4x . Nếu đặt t = sin2x + cos2x thì phương trình này sẽ trở thành phương trình nào dưới đây ?

a). $t^3 - 3t^2 + 3t - 5 = 0$ b) . $t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$

c) . $t^3 - 3t^2 - 3t + 5 = 0$ d) . $t^3 + 3t^2 + 3t - 5 = 0$

23 . Phương trình : $\frac{\sin 4x}{1 - \cos x} = 0$ (1) có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0,3\pi]$

a) 9 b) 10 c) 11 d) một đáp số khác

24 . Cho biểu thức : $E = \cos(x + \frac{4\pi}{3}) + \cos x$; $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right]$. Giá trị lớn nhất của E bằng bao nhiêu ?

a) $-\frac{1}{2}$ $b).1$ $c).\frac{1}{2}$ d) một đáp số khác

25 . Cho 3 hàm số : (I) : y = f(x) = $\sin^4 2x + \cos^4 2x$; (II) : y = f(x) = sin16x ;
(III) : y = f(x) =sin4x + cos4x . Trong các hàm số này , hàm số nào có tính chất :
$f(x + \frac{k\pi}{4}) = f(x), \forall x \in R, \forall k \in Z$

a) . Chỉ (I) b) , Chỉ (II) c) . Chỉ (I) và (II) d) . Cả (I) , (II) , (III)

B . Đáp án .

1c	**2b**	**3a**	**4b**	**5b**	**6d**	**7a**	**8d**	**9b**	**10d**
11a	**12d**	**13c**	**14b**	**15b**	**16d**	**17d**	**18a**	**19b**	**20d**
21c	**22b**	**23c**	**24d**	**25c**					

C . Hướng dẫn .

1 (c) . Chỉ có hàm số (4) là hàm số lẻ . Cả ba hàm số (1) , (2) , (3) đều là hàm số chẵn
2 (b) . Chỉ có hai hệ thức đúng vì :

$$\sin\frac{21\pi}{5} = \sin(\frac{\pi}{5} + 2.2\pi) = \sin\frac{\pi}{5} \text{ ; } \tan\frac{8\pi}{7} = \tan(\frac{\pi}{7} + \pi) = \tan\frac{\pi}{7}$$

$$\tan\frac{4\pi}{5} = -\tan\frac{\pi}{5} \text{ ; } \cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$$

3 (a) . Chỉ hệ thức (I) đúng vì:

$$(I): f(x + k\pi) = \sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x = f(x)$$

$$(II): f(x + k\pi) = \cos(x + k\pi) = -\cos x \ (khi\ k = 2n + 1\ , n \in Z)$$

$$(III): f(x + k\pi) = \tan(x + k\pi) = \tan x = f(x) \ (x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi)$$

(III) không đúng với mọi x nên không thỏa .

4 (b) . $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right] \Rightarrow \sin 2x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

Vẽ đường tròn lượng giác , trục sin , các ngọn cung : $-\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}$, ta thấy ngay tập giá trị của y = sin2x .

5(b)

$$y = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x) + 5 = 2(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x) + 5 = 2\sin(\frac{\pi}{3} - 2x) + 5$$

$\Rightarrow 3 \leq y \leq 7 \ (do\ -1 \leq \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) \leq 1) \ ; y = 7\ khi\ x = -\frac{\pi}{12}; y = 3\ khi\ x = \frac{5\pi}{12}$ Vậy M = 7 ;

m = 3 ; M + m = 10 .

6 (d) . y = (cosx + 2)^2 + 6 . Mà :

$1 \le \cos x + 2 \le 3 \Rightarrow 1 \le (\cos x + 2)^2 \le 9 \Rightarrow 7 \le y \le 15$

$y = 15\ khi\ x = 0$; $y = 7\ khi\ x = \pi$

Vậy M = 15 ; m = 7 ; M + m = 22

7 (a) . Đường tiệm cận của hàm số y = tan2x là những đường thẳng :

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ hay\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\ khi\ k = 1$$

Đường tiệm cận của hàm số y = cot2x là những đường thẳng :

$2x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ không nhận đường thẳng $x = \dfrac{3\pi}{4}$ làm đường tiệm cận .

Đường tiệm cận của hàm số y = tanx là những đường thẳng :

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ không nhận đường thẳng $x = \dfrac{3\pi}{4}$ làm đường tiêm can

8(d) . Phương trình cho thành :

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 18x + \sin 2x) \Leftrightarrow \sin 8x = \sin 18x \Rightarrow (a+b) = 26$$

9 (b) . $\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{24} + k\pi\ (1) \\ x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi\ (2) \end{array}\right.$

Họ (1) có 1 nghiệm thuộc khỏang $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $(x = \frac{\pi}{12})$

Họ (2) có 2 nghiệm thuộc khỏang $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $(x = -\frac{7\pi}{24}, x = \frac{17\pi}{24})$

10 (d) . sin (2x + 15^o) = - cosx = sin (x – 90^o) . Hai họ nghiệm là :

(1) : 2x + 15^o = x – 90^o + k 360^o hay x = -105^o + k360^o

(2) : 2x + 15^o = 180^o – x + 90^o +k360^o hay x = 85^o + k120^o .

Họ (1) có 1 nghiệm x = 255^o thuộc khỏang (0^o, 300^o)

Họ (2) có 2 nghiệm x = 85^o ; x = 205^o thuộc khỏang (0^o, 300^o) . Tổng ba nghiệm này bằng 545^o .

11 (a) . Phương trình cho thành : cos2x.cos4x + 2cos2x = 0 hay cos2x (cos4x + 2) = 0

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$. Vậy a = $\dfrac{\pi}{4}$

12 (d) . cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình (vì vế trái = $\sqrt{3}$; vế phải = 0)

Chia hai vế cho cos^{2}x , ta có :

$$\tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0\ (\cos x \ne 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k'\pi \end{array}\right.$$

$a = \dfrac{\pi}{4}$; $b = \dfrac{\pi}{3}$; $a + b = \dfrac{7\pi}{12}$

13 (c) . Phương trình cho thành :
(2sinx + 1) (2 – 3sinx) = 3 – 4 (1 – $\cos^2$x) = 4$\sin^2$x – 1
Hay (2sinx + 1) (2 – 3sinx) = (2sinx + 1) (2sinx – 1)
(2sinx + 1) (2 – 3sinx - 2sinx + 1) = 0 hay (2sinx + 1) (3 – 5sinx) = 0
Do đó : $\frac{d}{c} = -\frac{3}{5}$ (tỉ số $\frac{d}{c} = \frac{1}{2}$ không có trong đáp án nên chỉ có thể lấy d =3 ; c = - 5)

14 (b) . Phương trình cho thành : msin2x + 2cos2x = m + 3 . Điều kiện để phương trình có nghiệm là : $m^2 + 2^2 \geq (m+3)^2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{6}$. Các giá trị của m thỏa là
: -3 ; -2 ; -1 .

15 (b) . Phương trình cho thành : 2sinxcos2x + 2sinxcos4x + 2sinxcos6x = sin7x + 1 hay
Sin3x – sinx + sịn5x – sin3x + sin7x – sin5x = sin7x + 1 hay sinx + 1 = 0 .
Vậy : a = 1 ; b = 1 ; a + b = 2 .

16 (d) . Phương trình cho thành :

$$\cos 5x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x) + \frac{1}{2}(1+\cos 6x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 5x + \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x + \cos 5x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x(\cos x + 1) = 0$$

Vây : a = 5 .

17 (d) . Phương trình cho có nghiệm là : (nghiệm sinx = 2 loại)

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \,(1) \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \,(2) \end{array}\right.$$

Họ (1) có nghiệm dương nhỏ nhất là : $x = \frac{11\pi}{6} (cho\, k = 1)$

Họ (2) có nghiệm dương nhỏ nhất là : $x = \frac{7\pi}{6} (cho\, k = 0)$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là : $x = \frac{7\pi}{6}$

18 (a) . Phương trình cho thành :

$$(1-t)\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) = 1 + t \Leftrightarrow (1-t)(1+t)^2 = (1+t)(1+t^2) \Leftrightarrow$$

$$(1+t)\left[(1+t^2) - (1-t)(1+t)\right] = 0 \Leftrightarrow 2t^2(1+t) = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 = 0$$

19 (b) Phương trình thành : 2sin (2x + 60^o) = 1 (vì cos (30^o—2x) = sin (60^o + 2x))
Ta có : $\sin(2x+60^o) = \frac{1}{2} = \sin 30^o \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 60^o = 30^o + k360^o \\ 2x + 60^o = 150^o + k360^o \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -30^o + k360^o \\ 2x = 90^o + k360^o \end{array}\right.$

Theo giả thiết : 2a = - 30^o ; $\sin 2a = -\frac{1}{2}; \cos 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}; 5\sin^2 2a + \cos^2 2a = 2$

20 (d) . Phương trình thành : 1 + cos4x + 4 (1 –2$\sin^2$x$\cos^2$x) = 1 hay :

$1 + \cos 4x + 4 - 8\sin^2 x\cos^2 x = 1$ hay $1 + \cos 4x + 4 - (1 - \cos 4x) = 1$
hay $2\cos 4x + 3 = 0$
Vậy (a + b) = 5 (thật ra a + b có dạng 5c , c là một số bất kỳ khác 0 , ví dụ phương trình này có thể viết : $6\cos 4x + 9 = 0$; a + b = 15) . Theo đề bài ta chọn d ,

21 (c) . Phương trình có nghiệm là :

$$\left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \sqrt{3}\\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a = \dfrac{\pi}{4}\\ b = \dfrac{\pi}{3}\\ c = \dfrac{\pi}{6}\end{array}\right. \Rightarrow a + b + c = \frac{3\pi}{4}$$

22 (b) . Phương trình thành :
$2 + 2(\sin 2x + \cos 2x)(\sin^2 2x - \sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x) = 3\sin 4x$
Hay : $2 + (\sin 2x + \cos 2x)(2 - 2\sin 2x\cos 2x) = 3 .2\sin 2x\cos 2x$. $t = \sin 2x + \cos 2x$;
$t^2 = 1 + 2\sin 2x\cos 2x$; phương trình thành : $2 + t(2 - (t^2 - 1)) = 3(t^2 - 1)$ hay
$t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$.

23(c). Điều kiện để phương trình có nghĩa :
$1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$

$$(1) \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = m\pi \Leftrightarrow x = \frac{m\pi}{4}$$

$$0 \le x \le 3\pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{m\pi}{4} \le 3\pi \Leftrightarrow 0 \le m \le 12$$

So với điều kiện , ta phải loại các giá trị : m = 0 ; m = 8 .Vậy phương trình (1) có 11 nghiệm thuộc đoạn đã cho .

$$24(d). E = 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos(x + \frac{2\pi}{3})(\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2})$$

$$= -\cos(x + \frac{\pi}{3})$$

$$-\frac{\pi}{3} \le x \le -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le x + \frac{2\pi}{3} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \cos(x + \frac{2\pi}{3}) \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le E \le 0$$

Vậy giá trị lớn nhất của E là 0 .

$$25(c).(I): y = 1 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 8x$$

$$f(x + \frac{k\pi}{4}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 8(x + \frac{k\pi}{4}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(8x + k2\pi) = f(x)$$

$$(II): f(x + \frac{k\pi}{4}) = \sin 8(x + \frac{k\pi}{4}) = \sin(8x + k2\pi) = \sin 8x = f(x)$$

$$(III): f(x + \frac{\pi}{4}) = \sin 4(x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4(x + \frac{\pi}{4}) (cho\, k = 1)$$

$$= \sin(4x + \pi) + \cos(x + \pi) = -\sin 4x - \cos 4x$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = -1 \neq f(\frac{\pi}{4}) = 1 (cho\, x = \frac{\pi}{4})$$

Vậy chỉ có (I) và (II) thỏa điều kiện cho .