

ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

Phần 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. HỆ THỨC CƠ BẢN:

I. TÍNH TOÁN:

1) Cho $\sin x = \frac{4}{5}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

2) Cho $\cos x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị các HSLG còn lại.

3) Cho $\tan x = \sqrt{2}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\cot x$, $\cos x$, $\sin x$.

4) Cho $\cot x = \frac{1}{2}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

5) Cho $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$ ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$).

Tính $A = \tan x + \cot x$; $B = \sin x - \cos x$

6) Cho $\cos x = -\frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\cot x + 3\tan x}{2 \cot x - \tan x}$

7) Cho $\sin x = \frac{3}{5}$. Tính $B = \frac{\cot x + 2\tan x}{3 \cot x - \tan x} = \frac{3A}{39}$

8) Cho $\tan x = a$. Tính $A = \sin^4 x - \cos^4 x$ theo a

9) Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \frac{\sin x - 2 \cos x}{3 \sin x + \cos x}$

10) Cho $\cot x = 2$. Tính $A = \frac{2}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x}$

11) Cho $2 \sin x - \cos x = 1$. Tính $\sin x$ và $\cos x$.

12) Cho $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$. Tính $\tan x$ và $\cot x$.

13) Cho $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = 2$. Tính: $A = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{cotg}^2\alpha$; $B = \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{cotg}^3\alpha$

14) Cho góc a nhọn và $4\operatorname{tga} - 3\operatorname{cotga} = 4$. Tính tga và cotga .

II. CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC:

1) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

2) $\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x = \operatorname{cotg}^2 x \cdot \cos^2 x$

3) $\frac{1 + 2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$

4) $\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha} = \operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$

5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1 + \cos\alpha)}$

6) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}$

7) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{4 \operatorname{cot} gx}{\sin x}$

8) $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$

9) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{1 - \cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}$

10) $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha)$

11) $\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tgy} = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}}{\operatorname{cot} gx + \operatorname{cot} gy}$

12) $\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \cdot \sin^2 y}$

13) $\frac{\operatorname{tg}^3 a}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin a \cdot \cos a} + \frac{\operatorname{cotg}^3 a}{\cos^2 a} = \operatorname{tg}^3 a + \operatorname{cotg}^3 a$

14) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\operatorname{cot} gx - \sin x \cdot \cos x} = 2\operatorname{tg}^2 x$

$$\times 15) \left(\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}} \right)^2 = 4\operatorname{tg}^2 a$$

$$16) (x\sin a - y\cos a)^2 + (x\cos a + y\sin a)^2 = x^2 + y^2$$

$$17) \frac{\sin a + \cos a}{\sin^3 a} = \operatorname{cotg}^3 a + \operatorname{cotg}^2 a + \operatorname{cotg} a + 1$$

III. RÚT GỌN BIỂU THỨC:

$$1) A = \frac{\cos x \cdot \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} - \cos x \cdot \operatorname{cotg} x$$

$$2) B = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$3) C = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{cotg}^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$4) D = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} - \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$5) E = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \quad (0^\circ < x < 90^\circ)$$

$$6) F = \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x}$$

$$7) G = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \operatorname{cotg}^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x}$$

$$8) H = \frac{1}{\sin x - \sqrt{\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x}} \quad (\pi < x < 2\pi)$$

$$9) K = (\operatorname{tga} + \operatorname{cotga})^2 - (\operatorname{tga} - \operatorname{cotga})^2$$

$$10) L = (1 - \sin^2 x) \operatorname{cotg}^2 x + 1 - \operatorname{cotg}^2 x$$

$$11) M = (x\sin a - y\cos a)^2 + (x\cos a + y\sin a)^2$$

IV. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC ĐỘC LẬP ĐỐI VỚI x:

$$1) A = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{4\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$\times 2) B = \frac{\cos^2 x - \cot g^2 x}{\cot g^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cot gx}$$

$$3) C = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot g^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\times 4) D = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right)^2 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \cot g^2 x)$$

$$5) E = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$$

$$\times 6) F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$$

$$\times 7) G = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$$

$$8) H = \cos^6 x + 2\sin^6 x + \cos^2 x \sin^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$9) K = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$$

B. CUNG LIÊN KẾT:

I. TÍNH TOÁN:

1) Tính giá trị các HSLG của các góc (cung) sau:

a) 120^0 ; 150^0

b) 300^0 ; 390^0 ; 570^0 ; 960^0

c) $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{6}$

d) $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$

2) Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \operatorname{tg} 1^0 \cdot \operatorname{tg} 2^0 \cdot \operatorname{tg} 3^0 \dots \operatorname{tg} 87^0 \cdot \operatorname{tg} 88^0 \cdot \operatorname{tg} 89^0$

b) $B = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \sin^2 30^0 + \dots + \sin^2 180^0$

c) $C = \frac{\sin 120^0 - \cos 150^0}{\operatorname{tg} 135^0 + \cot g(-225^0)}$

d) $D = \frac{\sin(-234^0) - \cos 216^0}{\sin 144^0 - \cos 126^0} \cdot \operatorname{tg} 36^0$

$$e) E = \frac{(\cot 44^\circ + \operatorname{tg} 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cdot \cot 18^\circ$$

$$f) F = \frac{1}{\operatorname{tg} 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$$

$$g) G = \sin 825^\circ \cdot \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \cdot \sin(-555^\circ) + \operatorname{tg} 155^\circ \cdot \operatorname{tg} 245^\circ$$

$$h) H = \frac{\cos(-288^\circ) \cot 72^\circ}{\operatorname{tg}(-162^\circ) \sin 108^\circ} - \operatorname{tg} 18^\circ$$

II. RÚT GỌN BIỂU THỨC:

$$a) A = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cot \operatorname{g}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi - \alpha)}$$

$$b) B = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha) \cot \operatorname{g}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \cot \operatorname{g}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}$$

$$c) C = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$$

$$d) D = \sin(5\pi + a) - \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \cot \operatorname{g}(11\pi - a) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)$$

$$e) E = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot \operatorname{g}(3\pi - x)$$

III. CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC:

$$a) \cos(B + C) = -\cos A$$

$$b) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$$

$$c) \cos \frac{3A+B+C}{2} = -\sin A$$

$$d) \sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$$

$$e) \sin(A + B + 2C) = -\sin C$$

$$f) \cos \frac{2A+B+C}{2} = -\sin \frac{A}{2}$$

$$g) \cos(A + B - C) = -\cos 2C$$

$$h) \operatorname{tg} \frac{A+B-2C}{2} = \cot \operatorname{g} \frac{3C}{2}$$

C. SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA CÁC HSLG:

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin \sqrt{x+2}$

b) $y = \cos \frac{x+1}{x-3}$

c) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $y = \operatorname{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

e) $y = \cos \frac{3x+1}{x^2-1}$

f) $y = \sin \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

g) $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

h) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

2. Khảo sát tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = x \sin x$

b) $f(x) = |x| \cos x$

c) $f(x) = x - \sin x$

d) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

e) $f(x) = \operatorname{tg} x + 2 \sin x$

f) $f(x) = |\sin x| - 3 \cos x$

3. Chứng minh:

a) Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ b) Hàm số $y = |\cos x|$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$

4. Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = -\sin x$ và $y = \sin|x|$ trên cùng 1 hệ trụcb) $y = -\cos x$ và $y = \cos|x|$ trên cùng 1 hệ trục

5. Tìm GTLN - GTNN của:

a) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

b) $y = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right| + \frac{3}{2}$

c) $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$

Phần 2: **CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

I. CÔNG THỨC CỘNG:

1) Tính: $\sin 15^\circ$; $\cos 75^\circ$; $\operatorname{tg}(-195^\circ)$; $\operatorname{cotg}(105^\circ)$; $\sin(-\frac{17\pi}{12})$

2) Cho $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)$

3) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\operatorname{tg}(a + \frac{\pi}{3})$

4) Cho $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3}) = 3$. Tính $\operatorname{tg}x$

5) Cho $\operatorname{tg}(a + b) = 5$ và $\operatorname{tg}(a - b) = 3$. Tính tga và tgb .

6) Tính: $\cos(a + b)$ và $\sin(a - b)$ nếu biết:

$$\sin a = \frac{4}{5} \quad (0^\circ < a < 90^\circ); \quad \sin b = \frac{8}{17} \quad (90^\circ < b < 180^\circ)$$

7) Cho $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính $A = \cos(a + b)\cos(a - b)$

8) Cho $0 < a < \frac{\pi}{2}$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$; $a + b = \frac{\pi}{2}$ và $\operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb} = 3 - 2\sqrt{2}$

a) Tính $\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}$

b) Tính tga và tgb .

9) Cho $\operatorname{tg}(a + b) = 3$ và $\operatorname{tg}(a - b) = 2$. Tính $\operatorname{tg}2a$, $\operatorname{tg}2b$, $\operatorname{tg}(3a - b)$

10) Cho $\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = 2$ và $\operatorname{tg}(a + b) = 4$. Tính tga và tgb .

11) Cho $\operatorname{tga} = \frac{4}{3}$ và $\operatorname{tgb} = 7$. CMR: $a + b = 135^\circ$ (a và b là góc nhọn)

12) Cho $\operatorname{tga} = \frac{4}{3}$ và $\operatorname{tgb} = \frac{1}{7}$. CMR: $a - b = 45^\circ$ (a và b là góc nhọn)

13) Tính giá trị của các biểu thức:

a) $A = \cos 48^\circ \cdot \sin 12^\circ + \cos 42^\circ \cos 12^\circ$

b) $B = \sin 27^\circ \cdot \cos 57^\circ - \sin 63^\circ \sin 57^\circ$

c) $C = \sin 76^\circ \sin 44^\circ - \sin 14^\circ \sin 46^\circ$

$$d) D = \frac{1 + \operatorname{tg}27^\circ \operatorname{tg}177^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}3^\circ}$$

$$e) E = \frac{1 - \operatorname{tg}18^\circ \operatorname{tg}78^\circ}{\operatorname{tg}18^\circ + \operatorname{tg}12^\circ}$$

14) Tính:

$$a) A = \cos220^\circ \cdot \sin10^\circ - \sin220^\circ \cos10^\circ$$

$$b) B = \sin215^\circ \sin10^\circ - \cos215^\circ \cos10^\circ$$

$$c) C = \frac{1 - \operatorname{tg}15^\circ}{1 + \operatorname{tg}15^\circ}$$

$$d) D = \frac{\operatorname{tg}129^\circ + \operatorname{tg}111^\circ}{1 - \operatorname{tg}129^\circ \operatorname{tg}111^\circ}$$

$$e) E = \sin^2 285^\circ - \cos^2 285^\circ$$

$$f) F = \frac{\operatorname{cotg}225^\circ - \operatorname{cotg}79^\circ \cdot \operatorname{cotg}71^\circ}{\operatorname{cotg}259^\circ + \operatorname{cotg}251^\circ}$$

$$g) G = \cos68^\circ \cdot \cos78^\circ + \cos22^\circ \cdot \cos12^\circ - \cos10^\circ$$

$$h) H = \operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ + \operatorname{tg}80^\circ \cdot \operatorname{tg}140^\circ + \operatorname{tg}140^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ$$

$$k) K = \operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}70^\circ \cdot \operatorname{tg}130^\circ + \operatorname{tg}130^\circ \cdot \operatorname{tg}190^\circ$$

15) Chứng minh các đẳng thức:

$$\times a) \sin(a + b)\sin(a - b) + \cos(a + b)\cos(a - b) = 1 - 2\sin^2 b$$

$$b) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$d) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\times e) \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \cos a$$

$$f) \operatorname{tg}x + \operatorname{tgy} = \frac{2 \sin(x + y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$$

$$g) \operatorname{tg}x - \operatorname{tgy} = \frac{2 \sin(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$$

$$h) \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\times k) \frac{\cos(a+b)\cos(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b} = 1 - \operatorname{tg}^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 b$$

16) Chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - a) + \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - a) + \operatorname{tg}(60^\circ - a) \operatorname{tg}(30^\circ - a) = 1$$

17) Chứng minh rằng: $\sin 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{3}$

18) Rút gọn các biểu thức sau:

$$\times a) A = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$$

$$b) B = \frac{2 \sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} - \operatorname{tg} b$$

$$\times c) C = \cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b)$$

$$d) D = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\times e) E = \cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\times f) F = \frac{\cos a \cos b - \cos(a+b)}{\cos(a-b) - \sin a \sin b}$$

19) Chứng minh các đẳng thức trong tam giác:

$$\times a) \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\times b) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\times c) \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

$$\times d) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

$$e) \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} A = 1$$

II. CÔNG THỨC NHÂN:

1. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$ biết:

$$\times a) \sin a = \frac{4}{5} \text{ và } \frac{\pi}{2} < a < \pi$$

$$\times b) \operatorname{tg} a = 2$$

$$\times c) \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } 0^\circ < a < 90^\circ$$

$$\times d) \operatorname{cotg} a = -3$$

\times 2. Tính $\sin x$, $\cos x$ biết $\sin 2x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$

3. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

$$b) B = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

$$c) C = \operatorname{tg}^2 15^\circ + \operatorname{tg}^2 75^\circ$$

$$d) D = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$$

$$e) E = \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$f) F = \sin 18^\circ$$

$$g) G = \cos \frac{\pi}{5}$$

4. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\times a) \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$b) \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{cotg} 2x$$

$$c) \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$d) 8\sin^4 x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$$

$$e) \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \frac{\sin 2x}{2}$$

$$f) \operatorname{tg} 2a + \frac{1}{\cos 2a} = \frac{1 - 2\sin^2 a}{1 - \sin 2a}$$

g) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\operatorname{tg}2x$

h) $\sqrt{\cos^2 x \cos^2 y - \frac{1}{2} \sin 2x \sin 2y + \sin^2 x \sin^2 y} = |\cos(x+y)|$

i) $1 - \sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

j) $\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} = \operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$

k) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

l) $\operatorname{tg} \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\cos a} + 1\right) = \operatorname{tga}$

5. CMR: $\operatorname{tg}(60^\circ + a)\operatorname{tg}(60^\circ - a) = \frac{\operatorname{tg}3a}{\operatorname{tga}}$

6. CMR: $4\sin a \cdot \cos(30^\circ - a)\sin(60^\circ - a) = \sin 3a$

7. Cho $0^\circ < a, b < 90^\circ$ và $\begin{cases} 3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1 \\ 3\sin 2a - 2\sin 2b = 0 \end{cases}$. CMR: $a + 2b = 90^\circ$

8. CMR: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos a}}} = \cos \frac{a}{8} \quad (0 < a < \pi)$

9. Từ nhận xét: $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ hãy tính $\sin 18^\circ$.

10. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \left(\cos \frac{a}{2} - \sin \frac{a}{2}\right)\left(\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}\right)$

b) $B = \sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$

c) $C = \frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x}{\cos x}$

d) $D = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}}$

$\sqrt{8\sin^2 2x} = 1$

e) $E = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \frac{a}{2}}}$

$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{a}{4}}} = \frac{1}{\cos \frac{a}{4}}$

f) $F = \sin a \cos a \cos 2a \cos 4a$

$$g) G = \frac{2}{\sin 4x} - \cot g 2x$$

$$h) H = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x$$

III. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI:

1. Biến đổi thành tích:

$$a) A = \sin 4x + \sin 2x$$

$$c) C = \cos 2x - \cos 6x$$

$$e) E = 1 + \cos x + \cos 2x$$

$$g) G = \sin a + \sin b + \sin(a + b)$$

$$i) I = 1 - \sin x$$

$$b) B = \sin 2x - \sin 3x$$

$$d) D = \cos(a + b) + \cos(a - b)$$

$$f) F = 1 + \sin a + \cos a$$

$$h) H = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$j) J = \sqrt{3} + 2\cos x$$

2. Biến đổi thành tổng:

$$a) A = \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$c) C = \cos(a + b)\cos(a - b)$$

$$e) E = 2\sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$b) B = \sin(x + 30^\circ)\cos(x - 30^\circ)$$

$$d) D = \sin(a - b)\cos(b - a)$$

$$f) F = \cos 2x \cos 4x \cos 6x$$

$$3. a) \text{CM: } \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

$$b) \text{CM: } \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

4. Tính:

$$a) A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ$$

$$c) C = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$$

$$e) E = \sin^2 10^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 70^\circ$$

$$b) B = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$d) D = \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$$

5. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \cos^2 a - \cos^2 3a = \sin 4a \sin 2a$$

$$b) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$c) \sin^2 b - \cos^2(a - b) + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a$$

d) $\sin 5x - \sin x = 2\sin x(\cos 2x + \cos 4x)$

e) $\cos 3x = 4\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

f) $\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 5x = 8\sin^2 x \cos^3 x$

g) $\frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cos a} = 0$

6. Cho ΔABC có 3 góc nhọn tạo thành cấp số cộng thỏa:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

a) Tính 3 góc của ΔABC .

b) Cho chu vi $\Delta ABC = 100$. Tính 3 cạnh của ΔABC .

7. Cho ΔABC . CMR: $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

8. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \frac{1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a}{\cos a + 2\cos^2 a - 1}$

b) $B = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$

c) $C = \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x \right)$

d) $D = \frac{\sin 5a}{\sin a} - 2(\cos 2a + \cos 4a)$

e) $E = \sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} \quad (-45^\circ < x < 45^\circ)$

9. Chứng minh các đẳng thức trong tam giác:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

$$c) \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$d) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$e) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

10. Nhận dạng tam giác:

a) CMR: nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ thì ΔABC vuông tại A.

b) CMR: nếu $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ thì ΔABC vuông hay cân.

c) CMR: nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì ΔABC cân.

d) CMR: nếu $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$ thì ΔABC đều.