

b) Cho  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin y - 3\cos y}{3\sin y + \cos y}$ , Chứng minh rằng  $10\sin^2 x = (\sin y - 3\cos y)^2$

c) Cho  $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ ; CMR  $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$

### 3. CUNG LIÊN KẾT

#### \*.Nhóm A:

**Bài 11:** Tính

$\sin 120^\circ$	$\cos(-150^\circ)$	$\operatorname{tg} 135^\circ$	$\operatorname{cotg} 240^\circ$
$\sin(-2\pi/3)$	$\cos 5\pi/6$	$\operatorname{tg} 4\pi/3$	$\operatorname{cotg} 7\pi/6$
$\sin 330^\circ$	$\cos 315^\circ$	$\operatorname{tg} 540^\circ$	$\operatorname{cotg} 300^\circ$
$\sin(-11\pi/4)$	$\cos(31\pi/6)$	$\operatorname{tg}(-1395^\circ)$	$\operatorname{cotg}(-1140^\circ)$

**Bài 12:** Đơn giản :

$$A = \sin(5\pi + a) + \cos(a - \pi/2) + \operatorname{cotg}(3\pi - a) + \operatorname{tg}(3\pi/2 - a)$$

$$B = \cos(3\pi - a) + \sin(a - 3\pi/2) - \operatorname{tg}(\pi/2 + a) \cdot \operatorname{cotg}(3\pi/2 - a)$$

$$C = \sin(\pi + a) - \cos(\pi/2 - a) + \operatorname{cotg}(2\pi - a) + \operatorname{tg}(3\pi/2 - a)$$

$$D = \cos(270^\circ - a) - 2\sin(a - 450^\circ) + \cos(a + 900^\circ) + 2\sin(720^\circ - a) + \cos(540^\circ - a)$$

**Bài 13:** Cho A, B, C là 3 góc của 1 tam giác. Chứng minh rằng :

a)  $\sin(A + B) = \sin C$

b)  $\cos(A + B) + \cos C = 0$

c)  $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$

d)  $\cos \frac{3(A+B)}{2} = -\sin \frac{3C}{2}$

#### \*.Nhóm B:

**Bài 14:** Tính

$\operatorname{tg} 36^\circ$   $A = \frac{(\operatorname{cotg} 44^\circ + \operatorname{tg} 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \operatorname{cotg} 72^\circ \operatorname{cotg} 18^\circ$

$B = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ}$

$C = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

$D = \operatorname{tg}(-1^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-2^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-3^\circ) \dots \operatorname{tg}(-88^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-89^\circ)$

$E = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$

$F = \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg}(40^\circ + 30^\circ) \cdot \operatorname{tg}(40^\circ + 2 \cdot 30^\circ) \dots \operatorname{tg}(40^\circ + 5 \cdot 30^\circ)$

$G = \sin 70^\circ + \sin(70^\circ + 60^\circ) + \sin(70^\circ + 2 \cdot 60^\circ) + \dots + \sin(70^\circ + 5 \cdot 60^\circ)$

$H = \sin 30^\circ + \sin(30^\circ + 25^\circ) + \sin(30^\circ + 2 \cdot 25^\circ) + \dots + \sin(30^\circ + 11 \cdot 25^\circ)$

**Bài 15:** Cho tam giác ABC có 3 góc A, B, C và 3 cạnh tương ứng là a, b, c. CMR :

a)  $\cos(A + B - C) + \cos 2C = 0$ .

b)  $\sin \frac{B-C}{2} = \cos(\frac{A}{2} + C)$

c)  $\operatorname{tg}(3A + B + C) \cdot \operatorname{cotg}(B + C - A) = -1$

d)  $\frac{1 - \sin^2(A+B)}{1 - \cos^2(A+B+2C)} + 1 = \frac{1}{\cos^2[(A+B-C)/2]}$

e)  $a \cdot \cos \frac{A+C-B}{2} = b \cdot \sin(B+C)$

f)  $a \cdot \sin(A+B+2C) = c \cdot \cos \frac{3A+B+C}{2}$

g)  $b \cdot (\cos \frac{B+C-A}{2} + \cos \frac{A+B+C}{2}) + (a+c) \sin(A+2B+C) = 0$

**Bài 16:** Xác định các cung  $\alpha$  thỏa điều kiện :

- a)  $\sin \alpha = 1$
- b)  $\sin \alpha = -1/2$
- c)  $\cos \alpha = -\sqrt{2}/2$
- d)  $\cos \alpha = 1/2$
- e)  $\text{tg} \alpha = 1$
- f)  $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$

**Bài 17:** Xác định các cung  $\alpha$  thỏa điều kiện :

- a)  $\sin \alpha \geq 1$
- b)  $\cos \alpha \leq -1$
- c)  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha \leq 3$
- d)  $\sin \alpha + \cos \alpha \leq -2$

**\*.Nhóm C:**

**Bài 18:** Cho tam giác ABC thỏa  $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$ . Chứng minh rằng tam giác ABC vuông

**Bài 19:** Cho  $\cos(2x + y) = 1$ . Chứng minh rằng  $[\text{tg}(x+y) - \text{tg}x]\text{cotg}(y/2) = 2$

### 4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VỚI BIẾN SỐ THỰC

**\*.Nhóm A**

**Bài 20:** Chứng minh các hàm số sau là tuần hoàn và tìm chu kỳ :

- a)  $y = 2\sin 2x$
- b)  $y = \cos(x/3) + 1$
- c)  $y = 2\sin 2x - 3\cos x + 1$
- d)  $y = -\text{tg} 3x$

**Bài 21:** Tìm tập xác định của các hàm số sau :

- a)  $y = \frac{1}{2\sin x - 1}$
- b)  $y = \frac{1}{\text{tg} x - 1}$
- c)  $y = \sqrt{1 + \cos x}$
- d)  $y = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$
- e)  $y = \sqrt{-\cos x}$
- f)  $y = \frac{\sqrt{\text{tg} x}}{\sin^2 x - 2\cos x + 4}$

**\*.Nhóm B :**

**Bài 22:** Vẽ đồ thị các hàm số sau :

- a)  $y = |\sin x|$
- b)  $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
- c)  $y = \sin(-x)$
- d)  $y = 2\cos x$
- e)  $y = \text{tg} 2x$
- f)  $y = \sin|x|$
- g)  $y = \cos(x - \pi/4)$

**Bài 23:** Chứng minh các bất đẳng thức sau :

- a)  $\sin^4 x + \cos^4 x \leq 1$
- b)  $\sin x \cos x \leq 1/2$
- c)  $|\text{tg} x + \text{cotg} x| \geq 2$
- d)  $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$
- e)  $\sin^4 x - 7\sin^2 x + 6 \geq 0$

**Bài 24:** Chứng minh các bất đẳng thức sau :

- a)  $(1 + \frac{1}{\sin x})(1 + \frac{1}{\cos x}) \geq 3 + 2\sqrt{2} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$
- b)  $\sqrt{\cos^2 x} + \sqrt{\cos^2 y} \leq 2\sqrt{1 + \frac{(\sin x + \sin y)^2}{2}}$
- c)  $\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 8 \quad (0 < x < \pi/4)$
- d)  $(1 + 3\sin x)(1 + 3\cos x) \leq (1 + \frac{3}{\sqrt{2}})^2$

**Bài 25:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm sau :

- a)  $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$
- b)  $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$
- c)  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

**\*.Nhóm C:**

**Bài 26:**

- a) Tìm giá trị lớn nhất của  $y = \text{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x}$
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $y = (1 + \frac{1}{\sin^2 x})^2 + (1 + \frac{1}{\cos^2 x})^2$

c) Tìm GTLN và GTNN  $y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x < \pi)$

d) Tìm giá trị lớn nhất của  $y = \frac{3\sin^2 x (1 - 4\sin^2 x)}{\cos^4 x} \quad (0 < x < \pi/6)$

e) Tìm giá trị lớn nhất của  $y = \frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b}$  với  $\begin{cases} a \sin x + b \cos y = c \\ c \leq \min\{\frac{a^2+b^2}{a}; \frac{a^2+b^2}{b}\} \\ a, b, c > 0 \end{cases}$

f) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $y = \sqrt{\cos^2 x - 10 \cos x + 34} + \sqrt{\cos^2 x + 6 \cos x + 18}$

g) Tìm GTLN và GTNN của  $z = \frac{a \sin^4 x + b \cos^4 y}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{a \cos^4 x + b \sin^4 y}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$   
với  $(a, b, c, d > 0)$

**Bài 27:** Chứng minh rằng:

a)  $\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin^2 y} > \sqrt[3]{\sin^2 z}$  (Với  $\sin x + \sin y = \sin z, 0^\circ < x, y, z < 180^\circ$ )

b)  $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha} \leq 3/4$   
(Với  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ )

c)  $\frac{(1-x^2)\sin a + 2x \cos a}{1+x^2} \leq 1$

### 5. CÔNG THỨC CỘNG

**\*.Nhóm A:**

**Bài 1:** Tính  $\sin, \cos, \operatorname{tg}$  của các góc sau đây:

a)  $15^\circ$       b)  $5\pi/12$       c)  $49\pi/12$       d)  $103\pi/12$

**Bài 2:** Cho  $\cos a = -12/13$  ( $\pi/2 < a < \pi$ ) và  $\operatorname{tg} b = 7/24$  ( $\pi < b < 3\pi/2$ )

Tính  $\sin(a+b); \cos(a+b); \sin(a-b); \cos(a-b)$

**Bài 3:** Chứng minh các đẳng thức sau

a)  $\operatorname{Tg}(\pi/4 + a) = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$       b)  $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{-2 \sin(a \pm b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$

c)  $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b}$       d)  $\operatorname{cotg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{Cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b \pm 1}{\operatorname{cotg} b \pm \operatorname{cotg} a}$

**\*.Nhóm B:**

**Bài 4:** a) Cho  $x + y = \pi/3; \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 3\sqrt{3}/4$ ; tính  $\operatorname{tg} x; \operatorname{tg} y$

b) Biết  $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$ . Tính  $x + y$

**Bài 5:** a) Cho  $a, b$  nhọn và  $\operatorname{tg} a = (\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1); \operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tính góc  $a - b$

b) Cho 2 góc nhọn  $x, y$  và  $\operatorname{tg} x = 1/2; \operatorname{tg} y = 1/3$ . Tính góc  $x + y$

**Bài 6:** Cho

a)  $\operatorname{tg}$

c)  $\operatorname{cotg}$

d)  $\cos$

e)  $\sin$

f)  $\sin$

**Bài 7:** Chứng

a)  $\cos$

b)  $\sin$

c)  $\operatorname{tg}$

**\*.Nhóm**

**Bài 8:** a)  $\cos$

b)  $\cos$

**Bài 9:** Cho

**Bài 10:** a)  $\cos$

b)  $\cos$

**Bài 11:** Cho

$1 - \operatorname{cotg}$

$\cos$

**\*.Nhóm A:**

**Bài 1:** a) Cho

b) Cho

c) Cho

d) Cho

**Bài 2:** Chứng

a)  $\cos^2$

c)  $\frac{\sin^4 a}{2}$

e)  $\sin 3a$

f)  $\cos 3a$

g)  $\sin 3a$

**Bài 3:** Chứng

a)  $\operatorname{cotg} a$

c)  $(\operatorname{tg} 2a -$

**Bài 6** Cho tam giác ABC. Chứng minh các đẳng thức sau đây :

- a)  $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$     b)  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$   
 c)  $\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = 1$   
 d)  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$

e)  $\operatorname{Tg} B + \frac{\sin B}{\cos A \cdot \cos C} = \operatorname{tg} C + \frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B}$

f)  $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$

**Bài 7** : Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\cos^2 x + \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} - x \right) = 3/2$

b)  $\sin^2(a - b) + \sin^2 b + 2 \sin(a - b) \sin b \cdot \cos a = \sin^2 a$

c)  $\operatorname{tg}(a - b) + \operatorname{tg}(b - c) + \operatorname{tg}(c - a) = \operatorname{tg}(a - b) \cdot \operatorname{tg}(b - c) \cdot \operatorname{tg}(c - a)$

**\*.Nhóm C**

**Bài 8**: a) Cho  $0^\circ < a, b < 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg}(a + b) = -2$  và  $\operatorname{tg}(2b - a) = -7$ . Tính góc a

b) Cho  $0^\circ < a, b, c < 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} a = 1/2$ ;  $\operatorname{tg} b = 1/5$ ;  $\operatorname{tg} c = 1/8$  Tính góc  $(a + b + c)$

**Bài 9** : Cho  $\cos(a + 2b) = k \cos a$ . Chứng minh rằng :  $\operatorname{tg}(a + b) \cdot \operatorname{tg} b = \frac{1 - k}{1 + k}$  ( $k \neq -1$ )

**Bài 10**: a) Cho  $\cos(a - b) \cdot \sin(c - d) = \cos(a + b) \cdot \sin(c + d)$

Chứng minh rằng  $\operatorname{cotg} d = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} b \cdot \operatorname{cotg} c$

b) Chứng minh  $\sin(a + b) \cdot \cos b - \sin(a + c) \cdot \cos c = \sin(b - c) \cdot \cos(a + b + c)$

**Bài 11**: Cho tam giác ABC. Chứng minh

$$\frac{1 - \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cotg} A} + \frac{1 - \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B} + \frac{1 - \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C} = 2(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)$$

**6. CÔNG THỨC NHÂN**

**\*.Nhóm A :**

**Bài 1**: a) Cho  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ . Tính  $\cos 18^\circ \cdot \sin 36^\circ$ ,  $\cos 36^\circ$

b) Cho  $\sin \alpha = 4/5$  ( $\pi/2 < \alpha < \pi$ ). Tính giá trị của các HSLG góc  $2\alpha$

c) Cho  $\sin 2\alpha = -4/5$  ( $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ ). Tính giá trị các HSLG góc  $\alpha$

d) Cho  $\operatorname{tg} a = m \neq 0$ . Tính  $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ . Áp dụng tính  $\operatorname{tg} 112^\circ 30'$

**Bài 2** : Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x$

b)  $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x$

c)  $\frac{\sin^4 a - \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} = \cos^2 \frac{a}{2}$

d)  $\frac{\sin 2a - 2 \sin a}{\sin 2a + 2 \sin a} + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = 0$

e)  $\sin 3a \cos^3 a + \cos 3a \sin^3 a = \frac{3}{4} \sin 4a$

f)  $\cos 3a = 4 \cos a \cdot \cos(\pi/3 - a) \cdot \cos(\pi/3 + a)$

g)  $\sin 3a = 4 \sin a \cdot \sin(\pi/3 - a) \cdot \sin(\pi/3 + a)$

h)  $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tg}(\pi/3 - a) \cdot \operatorname{tg}(\pi/3 + a)$

**Bài 3** : Chứng minh rằng :

a)  $\operatorname{cotg} a - 2 \operatorname{cotg} 2a = \operatorname{tga}$

b)  $\cos 2a = \frac{1}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tg} 2a}$

c)  $(\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tga}) \cos 2a = \operatorname{tga}$

d)  $\sin 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\pi/4 - a)}{1 + \operatorname{tg}^2(\pi/4 - a)}$

\*. Nhóm B :

Bài 4 : Chứng minh các đẳng thức :

a)  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{\sin 16x}{16 \cdot \sin x}$  ( $x \neq k\pi$ )

b)  $\cot a - \operatorname{tg} a - 2\operatorname{tg} 2a - 4\operatorname{tg} 4a - 8\operatorname{tg} 8a = 16\cot 16a$

c)  $\frac{\cot^2 a - \cot^2 3a}{1 + \cot^2 3a} = 8\cos^2 a \cdot \cos 2a$

d)  $\cos^4 a = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2a + \frac{1}{8}\cos 4a$

e)  $\frac{3 - 4\cos 2a + \cos 4a}{3 + 4\cos 2a + \cos 4a} = \operatorname{tg}^4 a$

f)  $\frac{\sqrt{1 + \cos a} + \sqrt{1 - \cos a}}{\sqrt{1 + \cos a} - \sqrt{1 - \cos a}} = \cot\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  ; ( $\pi < a < 2\pi$ )

g)  $\cos 3a \cdot \cos^3 a + \sin 3a \cdot \sin^3 a = \cos^3 2a$

h)  $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(a - \pi/3) + \operatorname{tg}(a + \pi/3) = 3\operatorname{tg} 3a$

Bài 5 : Đơn giản biểu thức :

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a}}} \quad (\text{với } 0 \leq a \leq \pi) ;$$

ĐS:  $\cos(a/8)$

Bài 6 : Tính các biểu thức sau :

A =  $\operatorname{tg} 142^\circ 30'$  ; B =  $\sin \frac{\pi}{13} \cdot \sin \frac{3\pi}{18} \cdot \sin \frac{5\pi}{18} \cdot \sin \frac{7\pi}{18} \cdot \sin \frac{9\pi}{18}$

C =  $\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}$

D =  $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ$  (HD: Dùng bài 2h) ; E =  $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$   
(ĐS: E = 3/2)

Bài 7:

a) Cho  $\operatorname{tg} \frac{b}{2} = 4 \operatorname{tg} \frac{a}{2}$  Chứng minh rằng :  $\operatorname{tg} \frac{b-a}{2} = \frac{3\sin a}{5 - 3\cos a}$

b) Cho  $\cos \alpha = \cos a \cdot \cos b$  ( $a \neq \pi/2 + k\pi$ )

Chứng minh rằng :  $\operatorname{tg} \frac{\alpha+a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha-a}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2}$

c) Cho  $\begin{cases} 3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1 \\ 3\sin 2a - 2\sin 2b = 0 \end{cases}$  ( $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ )

Chứng minh rằng :  $a + 2b = \pi/2$

Bài 8 : Thu gọn các biểu thức sau :

A =  $\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2^2} \cdot \cos \frac{a}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{a}{2^n}$

B =  $(1 + \frac{1}{\cos x}) \cdot (1 + \frac{1}{\cos 2x}) \cdot (1 + \frac{1}{\cos 4x}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{\cos 2^n x})$

C =  $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x}$

Đặt  $u = \sin^2 a$ ,  $v = \sin^2 b$   
 $\begin{cases} 3u + 2v = 1 \\ 3 \cdot 2\sin a \cos a - 2 \cdot 2\sin b \cos b = 0 \end{cases}$   
 $3\sin^2 a + 2\sin^2 b = 1$   
 $6\sin a \cos a - 4\sin b \cos b = 0$

\*. Nhóm C :

Bài 9: a) Chứng minh rằng :  $4 \cos 36^\circ + \cot 7^\circ 30' = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$

b) Tính :  $A = \sin 21^\circ$

$$B = \frac{1}{\sin^2 \pi/7} + \frac{1}{\sin^2 2\pi/7} + \frac{1}{\sin^2 3\pi/7}$$

$$C = \sin^6 \frac{\pi}{7} + \sin^6 \frac{2\pi}{7} + \sin^6 \frac{3\pi}{7}$$

Bài 10 :

a) Chứng minh  $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2(60^\circ - a) + \operatorname{tg}^2(60^\circ + a) = 9\operatorname{tg}^2 3a + 6$

b) Cho  $\operatorname{tg}(a + b) = 3\operatorname{tg} a$

Chứng minh rằng :  $\sin(2a + 2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$

c) Cho  $(1 + m \cos x)(1 - m \cos y) = 1 - m^2$  (Với  $m \neq 0; m = \pm 1; y = \pi + k2\pi$ )

Chứng minh :

$$\left( \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{y}{2}} \right)^2 = \frac{1 + m}{1 - m}$$

Bài 11: Thu gọn các biểu thức :

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{a}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{a}{2^n} \quad B = \sin^3 \frac{a}{3} + 3 \sin^3 \frac{a}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{a}{3^n}$$

$$C = (2 \cos x - 1)(2 \cos 2x - 1)(2 \cos 4x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1} x - 1)$$

Bài 12: Cho tam giác ABC cân tại A, có  $\hat{A} = 10^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . CMR :

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) b^3 + a^3 = 3ab^2 \quad (\text{Hướng dẫn : Dùng } \sin 3a)$$

7. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

\*. Nhóm A:

Bài 1 : Biến đổi thành tích các biểu thức sau :

a)  $\sin 16^\circ + \sin 24^\circ + \sin 40^\circ$

b)  $\cos(54^\circ + x) + \cos(18^\circ - x) + \sin(36^\circ + 2x)$

c)  $1 - \sin a - \cos 2a$

d)  $\sin a + \sin 3a + \sin 7a + \sin 9a$

e)  $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c$  (Với  $a + b + c = \pi$ )

Bài 2 : Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\sin^2(\frac{\pi}{8} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - a) = \frac{\sin 2a}{\sqrt{2}}$

b)  $\frac{\sin a - \sin 3a + \sin 5a}{\cos a - \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$

c)  $\cos(a+b)\sin(a-b) + \cos(b+c)\sin(b-c) + \cos(c+a)\sin(c-a) = 0$

d)  $\frac{1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a}{2 \cos^2 a + \cos a - 1} = 2 \cos a$  e)  $\frac{1}{\operatorname{tg} 3a + \operatorname{tg} a} - \frac{1}{\cot 3a + \cot a} = \cot 4a$

f)  $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ$

**Bài 3:** Tính các biểu thức sau :

$$A = \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ \quad B = \frac{\sin 33^\circ \cos 87^\circ + \sin 3^\circ \cos 63^\circ}{\sin 6^\circ} \quad C = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

$$D = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ} \quad E = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$$

$$F = \cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ \quad G = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$$

**\*. Nhóm B :**

**Bài 4:** Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\cos a + \cos(a + \frac{2\pi}{3}) + \cos(a + \frac{4\pi}{3}) = \sin a + \sin(a + \frac{2\pi}{3}) + \sin(a + \frac{4\pi}{3})$

b)  $\sin(a + 60^\circ) + \cos(a + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a (\operatorname{cotg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{a}{2})$

c)  $\cos(a+b)\cos(a-b) + \cos(b+c)\cos(b-c) + \cos(c+a)\cos(c-a) = 2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) - 3$

d)  $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{b+c}{2} \cdot \cos \frac{c+a}{2}$

e)  $\operatorname{tg}^2(x+a) + \operatorname{tg}^2(x-a) = \frac{2(\sin^2 2x + \sin^2 2a)}{(\cos 2x + \cos 2a)^2}$

f)  $\cos^2(y+a) + \sin^2(y+b) + 2\cos(y+a)\sin(y+b)\sin(a-b) = \cos^2(a-b)$

g)  $\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{4(\sin a + \sin b)}{(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 + 2(\cos a + \cos b)}$

**Bài 5:** a) cho  $\sin(2a+b) = 3\sin b$  CMR :  $\operatorname{tg}(a+b) = 2 \operatorname{tg} a$

b) cho  $\cos(a+b) = 0$  CMR  $\sin(a+2b) = \sin a$

c) cho  $\sin a = m \cdot \sin(a+b)$  CMR :  $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin b}{\cos b - m}$   
(với  $a+b \neq \pi/2 + k\pi$ ;  $\cos b = m$ )

d) Cho  $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = 1$  CMR :  $\begin{cases} \sin 2a = \sin 2b \\ \cos 2a = -\cos 2b \end{cases}$

e) Tính  $H = \frac{1}{\cos^2 10^\circ} + \frac{1}{\sin^2 20^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ}$

**Bài 6:** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

b)  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

c)  $\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1$

d)  $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

e)  $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi-A}{4} \cdot \cos \frac{\pi-B}{4} \cdot \cos \frac{\pi-C}{4}$

f)  $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi-A}{4} \cdot \sin \frac{\pi-B}{4} \cdot \sin \frac{\pi-C}{4}$

g)  $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$

h)  $b \cdot \cos B + c \cdot \cos C = a \cdot \cos(B-C)$

**Bài 7:** Cho

a1)

a3)

a5)

b1)

b3)

b5)

**Bài 8:** Tam

a) S

c) si

d) a

f) co

**\*. NI**

**Bài 9:** Cho

**Bài 10:** Cho

**Bài 11:** Cho

CMR

**Bài 12:** Tìm a

**Bài 13:** Tìm a

**Bài 14:** Cho c

**Bài 15:** Tam g

a) cos A

b)  $(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B +$

c)  $a^2 + b^2$

d)  $\begin{cases} \cos \\ \cos^2 \end{cases}$

i)  $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

j)  $2S = R(a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C)$

k)  $r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$

**Bài 7:** Cho tam giác ABC. CMR:

a1)  $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq 3/2$

a2)  $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

a3)  $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \geq 3\sqrt{3}$  (ABC nhọn)

a4)  $\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C \geq \sqrt{3}$

a5)  $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq 1/8$

a6)  $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b1)  $1 < \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 3/2$

b2)  $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b3)  $\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

b4)  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

b5)  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 1/8$

b6)  $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

**Bài 8:** Tam giác ABC có tính chất gì khi biết:

a)  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$

b)  $\operatorname{cotg} 2C = \frac{1}{2} (\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B)$

c)  $\frac{\cos(B - C)}{\sin A + \sin(C - B)} = \operatorname{tg} B$

d)  $a \cdot \operatorname{tg} A + b \cdot \operatorname{tg} B = (a+b) \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$

e)  $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)$

f)  $\operatorname{cotg} \frac{C}{2} = \frac{2 \cdot \sin A \sin B}{\sin C}$

g)  $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab} = 1 \\ \cos A \cdot \cos B = 1/4 \end{cases}$

h)  $b + c = \frac{a}{2} + h_a \sqrt{3}$

**\*. Nhóm C:**

**Bài 9:** Cho  $\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)} = \frac{a}{h}$ ;  $\frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} = \frac{A}{B}$ ; ( $aB + bA \neq 0$ ) CMR  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$

**Bài 10:** Cho  $\frac{\sin y}{\sin(2x + y)} = \frac{n}{m}$ ; Tính  $A = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)}$

**Bài 11:** Cho  $a - b = k\pi$ ,  $m \neq 1$  và  $m \cdot \sin(a+b) = \cos(a - b)$

CMR:  $\frac{1}{1 - m \cdot \sin 2a} + \frac{1}{1 - m \cdot \sin 2b}$  không phụ thuộc vào a, b

**Bài 12:** Tìm a, b để  $a \cdot (\cos x - 1) + b^2 + 1 - \cos(ax + b^2) = 0$ ;  $\forall x$

**Bài 13:** Tìm a, b để  $\cos 2x + a \cos x + b \sin x \geq -1$ ;  $\forall x$

**Bài 14:** Cho  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \delta = 0$ ; CMR:  $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\delta = 12 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta$

**Bài 15:** Tam giác ABC có tính chất gì khi biết:

a)  $\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$

b)  $(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C) = (\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2})(\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2})$

c)  $a^2 + b^2 = \operatorname{tg} \frac{C}{2} (a^2 \operatorname{tg} A + b^2 \operatorname{tg} B)$  ( $A, B \neq 90^\circ$ )

d)  $\begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2} \\ \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq 1 \end{cases}$



**Bài 16:** CM các bất đẳng thức sau:

a)  $\sqrt{4\cos^2 x \cdot \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \cdot \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2 \quad (\forall x, y)$

b)  $3(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^2 3x) \geq (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x)^2$   
 ( Với điều kiện  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} 2x, \operatorname{tg} 3x$  xác định )

c)  $\frac{1}{1+\cos 2x} + \frac{1}{1+\cos 4x} + \frac{1}{1-\cos 6x} > 2$

d)  $\sin x + \sin y + \sin z + \sin(x+y+z) \leq \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(z+x)$   
 (với  $x, y, z > 0$  và  $x+y+z \leq \pi$ )

e)  $1 + \cos 2(n+1)x \cdot \cos 2x > 2\cos(n+2)x \cdot \cos nx$  (với  $n \in \mathbb{Z}^+$ ;  $x \neq k \frac{\pi}{n+1}$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ )

**Bài 17:** Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a)  $\operatorname{tg}^5 A + \operatorname{tg}^5 B + \operatorname{tg}^5 C \geq 9(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$  (ABC nhọn)

b)  $(1 + \frac{1}{\sin A})(1 + \frac{1}{\sin B})(1 + \frac{1}{\sin C}) \geq (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})^3$

c)  $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{1}{3} (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$  (ABC nhọn)

d)  $(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \leq \sqrt{3}(\cos A + \cos B + \cos C)$

e)  $\frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}} < 2$       f)  $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(ABC không tù)

g)  $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq \sqrt{\cos \frac{A}{2}} + \sqrt{\cos \frac{B}{2}} + \sqrt{\cos \frac{C}{2}}$

h)  $\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} + \sqrt{\operatorname{tg} C} \geq \sqrt{\cotg \frac{A}{2}} + \sqrt{\cotg \frac{B}{2}} + \sqrt{\cotg \frac{C}{2}}$  (ABC nhọn)

i)  $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$

j)  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sin A + \sin B + \sin C)$

**Bài 18:** Chứng minh rằng tồn tại tam giác ABC thỏa:

$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{12}{7}$       và  $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{12}{25}$