

Bài tập:

Bài 1. Tìm tập xác định và tập giá trị của các hàm số sau:

$$a/ y = \sin\left(\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$b/ y = \sqrt{\sin x}$$

$$c/ y = \sqrt{2 - \sin x}$$

$$d/ y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$e/ y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$$

$$f/ y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$g/ y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$h/ y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$$

$$i/ y = \frac{1}{\tan x - 1}$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$a/ y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$b/ y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$$

$$c/ y = \sqrt{\sin x}$$

$$d/ y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$$

$$e/ y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$$

$$f/ y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$$

$$g/ y = \sin x + \cos x$$

$$h/ y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$i/ y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$$

Bài 3. Xét tính chẵn - lẻ của hàm số:

$$a/ y = \sin 2x$$

$$b/ y = 2\sin x + 3$$

$$c/ y = \sin x + \cos x$$

$$d/ y = \tan x + \cot x$$

$$e/ y = \sin^4 x$$

$$f/ y = \sin x \cdot \cos x$$

$$g/ y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$$

$$h/ y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$$

$$i/ y = \tan|x|$$

Bài 4. Tìm chu kỳ của hàm số:

$$a/ y = \sin 2x$$

$$b/ y = \cos \frac{x}{3}$$

$$c/ y = \sin^2 x$$

$$d/ y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$$

$$e/ y = \tan x + \cot 3x$$

$$f/ y = \cos \frac{3x}{5} - \sin \frac{2x}{7}$$

$$g/ y = 2\sin x \cdot \cos 3x$$

$$h/ y = \cos^2 4x$$

$$i/ y = \tan(-3x + 1)$$

ĐS: a/  $\pi$ . b/  $6\pi$ . c/  $\pi$ . d/  $4\pi$ . e/  $\pi$ . f/  $70\pi$ . g/  $\pi$ . h/  $\frac{\pi}{4}$ . i/  $\frac{\pi}{3}$

## II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:**

1. Đơn vị đo góc và cung:  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  (rad)       $1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

2. Độ dài cung tròn: Cung tròn có số đo  $\alpha$  rad, bán kính R thì độ dài cung tròn là  $l = R \cdot \alpha$

3. Số đo góc lượng giác và cung lượng giác:

$Sđ(Ox, Oy) = a^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )       $Sđ(Ox, Oy) = \alpha + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$Sđ\widehat{AB} = a^\circ + k360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )       $Sđ\widehat{AB} = \alpha + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:**

Bài 1: a) Đổi sang radian các cung có số bằng độ sau:

$135^\circ; -72^\circ; 30^\circ 45'; 15^\circ 20' 30''$

b) Đổi sang độ các cung có số đo bằng radian sau:

$-\frac{16\pi}{3}; \frac{68\pi}{5}; 2,5; \frac{2}{\pi}$

Bài 2: Tìm góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo dương nhỏ nhất, biết một góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo:

a)  $-90^\circ$

b)  $1000^\circ$

c)  $\frac{30\pi}{7}$

d)  $-\frac{15\pi}{11}$

Bài 3: Trên đường tròn lượng giác tìm các điểm (các ngọn cung) của các cung lượng giác có số đo sau:

1)  $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

2)  $k60^\circ$

3)  $-\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$

4)  $k72^\circ$

Bài 4: Tìm độ dài của một cung tròn có số đo bằng độ là  $250^\circ$ , biết đường tròn có bán kính bằng 5.

Bài 5: Trên đường tròn có bán kính bằng 4cm. Tìm số đo bằng độ của góc ở tâm chắn cung tròn có độ dài 10cm.

Bài 6: Sau 3 giờ mũi kim phút của một đồng hồ vạch được một cung tròn có độ dài 20m, hỏi chiều dài của kim phút là bao nhiêu?

Bài 7: Biết độ dài của vòng kinh tuyến là 40.000km, hỏi bán kính trái đất là bao nhiêu km?

Bài 1: Tính các giá trị hàm số lượng giác còn lại biết:

a)  $\sin x = \frac{1}{3}$  ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

b)  $\cos x = -\frac{2}{3}$  ;  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

b)  $\tan x = -3$  ;  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

d)  $\cot x = 2$  ;  $-\pi < x < 0$

Bài 2: a) Cho  $\cos x = -\frac{4}{5}$ . Tính  $A = \frac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x}$

b) Cho  $\cot x = -2$ . Tính  $B = \frac{2}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}$

c) Cho  $\tan a + \cot a = 3$ . Tính:

$c_1/ \tan^2 a + \cot^2 a$

$c_2/ |\tan a - \cot a|$

$c_3/ \tan^3 a + \cot^3 a$

d) Cho  $\sin a + \cos a = m$ , hãy tính theo m:

$d_1/ \sin a \cdot \cos a$

$d_2/ |\sin a - \cos a|$

$d_3/ \sin^6 a - \cos^6 a$

Bài 3: Chứng minh rằng:

a)  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$

b)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

c)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

d)  $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x$

e)  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

f)  $\frac{\tan a - \sin a}{\sin^3 a} = \frac{1}{\cos a (1 + \cos a)}$

g)  $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x$

h)  $\frac{\tan^3 a}{\sin^2 a} - \frac{1}{\sin a \cdot \cos a} + \frac{\cot^3 a}{\cos^2 a} = \tan^3 a + \cot^3 a$

$$i) \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\cot x - \sin x \cos x} = 2 \tan^2 x$$

$$j) \left( \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} \right)^2 = 4 \tan^2 a$$

$$k) (x \sin a - y \cos a)^2 + (x \cos a + y \sin a)^2 = x^2 + y^2$$

$$l) \frac{\sin a + \cos a}{\sin^3 a} = \cot^3 a + \cot^2 a + \cot a + 1$$

$$m) \frac{1 + \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = 1 + 2 \tan^2 a$$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin^2 x} - \cos x \cdot \cot x$$

$$B = \sin^4 x (3 - 2 \sin^2 x) + \cos^4 x (3 - 2 \cos^2 x)$$

$$C = \sqrt{\sin^4 a + \sin^2 a \cos^2 a}$$

$$D = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Bài 5: Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc x:

$$a) A = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$$

$$b) B = \sin^2 x \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$$

$$c) C = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$$

$$d) D = \sin^8 x - \cos^8 x + 2 \sin^4 x + 4 \cos^4 x + 4 \sin^2 x - 3 - 4 \sin^6 x$$

$$e) E = \cos^6 x + 2 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \sin^4 x$$

$$f) F = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$$

$$g) G = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

### §3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Hai góc đối nhau:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

2. Hai góc bù nhau:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

3. Hai góc phụ nhau:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

4. Hai góc hơn kém nhau  $\pi$ :

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

#### B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Bài 1: Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a)  $\sin 315^\circ$ ;  $\cos 930^\circ$ ;  $\tan 405^\circ$ ;  $\sin 1140^\circ$

b)  $B = \cos 4455^\circ - \cos 945^\circ + \tan 1035^\circ - \cot(-1500^\circ)$

c)  $C = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 216^\circ} \cdot \tan 36^\circ$

d)  $D = \sin^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin^2 \frac{5\pi}{18} + \sin^2 \frac{7\pi}{18}$

e)  $E = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

f)  $F = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{10} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{10} + x\right)} - 1$

$$g) G = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ$$

$$h) H = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \tan 36^\circ$$

$$i) I = \frac{\cos(-288^\circ) \cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ) \sin 108^\circ} \cdot \tan 18^\circ$$

$$j) J = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$$

**Bài 2:** Rút gọn các biểu thức:

$$A = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(5\pi - a) + \cos(3\pi - a) + \cos(2008\pi - a)$$

$$B = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) + \cos\left(a - \frac{7\pi}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$C = \cos(a - 13\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + a\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cot\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$$

**Bài 3:** Chứng minh các đẳng thức trong tam giác:

$$a) \cos(B + C) = -\cos A$$

$$b) \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B + C}{2}$$

$$c) \cos \frac{3A + B + C}{2} = -\sin A$$

$$d) \cos \frac{2A + B + C}{2} = -\sin \frac{A}{2}$$

$$e) \tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2} \dots$$

$$f) \cot 2(A + B) + \cot 2C = 0$$

## B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

### ⊗ CÔNG THỨC CỘNG:

Bài 1: Tính:  $\sin 15^\circ$ ;  $\cos 105^\circ$ ;  $\tan 75^\circ$ ;  $\cot \frac{\pi}{12}$

Bài 2: Tính góc  $(a + b)$  biết:  $90^\circ < a, b < 180^\circ$ ;  $\tan a = \frac{1}{2}$ ;  $\tan b = \frac{1}{3}$

Bài 3: Tính:  $A = \frac{1}{2} \cos 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 15^\circ$

$$B = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 \text{ với } a - b = \frac{\pi}{3}$$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a)  $\sin(45^\circ + x) - \sin(45^\circ - x) = \sqrt{2} \sin x$

b)  $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c)  $\sin a \pm \cos a = \sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$ . Suy ra  $\tan x$ , biết  $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3$

d)  $\frac{\sin a + \sin b \cos(a + b)}{\cos a - \sin b \sin(a + b)} = \tan(a + b)$

### ⊗ CÔNG THỨC NHÂN:

Bài 1: Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ ;  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Tính  $\cos 2a$ ;  $\sin 2a$ ;  $\cos \frac{a}{2}$ ;  $\tan \frac{a}{2}$

Bài 2: Cho  $\tan a = -\frac{4}{3}$ . Tính  $\tan 2a$ ;  $\tan \frac{a}{2}$

Bài 3: Cho  $\tan \frac{a}{2} = t$ . Tính  $\sin a$ ;  $\cos a$ ;  $\tan a$  theo  $t$   
.....

Bài 4: Rút gọn:  $A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}$

$$B = \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x$$

$$C = \frac{4(\sin a \cos^3 a - \sin^3 a \cos a)}{\cos^4 2a - \sin^4 2a}$$

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 3a &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a \\ \cos 3a &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \end{aligned}$$

$$\text{b) } \cot x - \cot 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\text{c) } \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \cot x$$

$$\text{d) } \cos^3 a \sin a - \sin^3 a \cos a = \frac{\sin 4a}{4}$$

$$\text{e) } \tan^2 a = \frac{2 \sin 2a - \sin 4a}{2 \sin 2a + \sin 4a}$$

$$\text{f) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{3}{4}$$

$$\text{g) } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}$$

### ⊗ CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI:

Bài 1: Biến đổi thành tích:

$$\text{a) } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$\text{b) } \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$\text{c) } 1 + \sin x$$

$$\text{d) } 1 - \cos 2x + \sin 3x - \sin x$$

Bài 2: Biến đổi thành tổng:

$$\text{a) } 2 \cos^2 \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{b) } \sin^2 x \cos 3x$$

$$\text{c) } \sin x \cos 2x \cos 3x$$

$$\text{d) } \sin \frac{2\pi}{7} \left( \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$$

Bài 3: Chứng minh rằng:

$$\text{e) } \sin 6a \sin 4a - \sin 15a \sin 13a + \sin 19a \sin 9a = 0$$

$$\text{f) } \cos x + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0$$

$$\text{g) } \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{7x}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos x \cos 2x$$



$$h) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) = \sin x$$

$$i) \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 24^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Bài 4: Tính:

$$j) A = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ$$

$$k) B = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$$

$$l) C = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 84^\circ$$

$$m) D = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$$

$$n) E = \tan \frac{\pi}{24} + \tan \frac{7\pi}{24}$$

$$o) F = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$$

$$p) G = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

Bài 5: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a) \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$b) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$d) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$$

$$e) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$f) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

Bài 6: Nhận dạng tam giác ABC biết:

$$a) \sin A = \cos B + \cos C$$

$$b) \sin A = 2 \sin B \cos C$$

$$c) a \cos B - b \cos A = a \sin A - b \sin B$$

$$d) \begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

e) Tam giác ABC không tù. Tính các góc của tam giác biết:

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3 \quad (\text{Khối A - 2004}).$$

# Chương I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

## 1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

### \*.Nhóm A:

**Bài 1:** Đổi số đo các góc sau đây ra độ, phút

$$\alpha = \pi/5; \quad \beta = 2\pi/3; \quad \gamma = 1/2 \quad \delta = 5\pi/7$$

**Bài 2:** Đổi số đo các cung sau đây ra radian :

$$\alpha = 22^{\circ}30' \quad \beta = 15^{\circ} \quad \gamma = 102^{\circ}12'$$

**Bài 3:** Trên đường tròn định hướng gốc A, xác định các điểm B<sub>1</sub> và B<sub>2</sub> sao cho số đo  $\widehat{AB_1}$  và số đo  $\widehat{AB_2}$  là :

a)  $\frac{\pi}{3}$  và  $(\frac{\pi}{3} + \pi)$     b)  $\frac{\pi}{4}$  và  $(\frac{\pi}{4} - \pi)$     c)  $-\frac{\pi}{6}$  và  $\frac{\pi}{6}$     d)  $\frac{3\pi}{4}$  và  $(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{2})$

e)  $-45^{\circ}$  và  $(-45^{\circ} - 540^{\circ})$     f)  $120^{\circ}$  và  $(120^{\circ} - 720^{\circ})$

**Bài 4:** Trên đường tròn định hướng tâm O gốc A, xác định các tia OB sao cho góc định hướng  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  là :

a)  $-135^{\circ}$ ; b)  $270^{\circ}$ ; c)  $\frac{\pi}{2}$ ; d)  $\frac{7\pi}{6}$ ; e)  $\frac{-2\pi}{3}$

### \*.Nhóm B

**Bài 5:** Trên đường tròn định hướng gốc A cho trước góc  $\alpha$

i) Xác định các điểm B sao cho:

a)  $\widehat{AB} = \alpha + k2\pi$     b)  $\widehat{AB} = \alpha + k\pi$     c)  $\widehat{AB} = \alpha + \frac{k2\pi}{2}$

d)  $\widehat{AB} = \alpha + k\frac{\pi}{2}$     e)  $\widehat{AB} = \alpha + \frac{k2\pi}{5}$     f)  $\widehat{AB} = \alpha + \frac{k\pi}{3}$

ii) Nhận xét gì về các điểm B cho bởi  $\widehat{AB} = \alpha + \frac{k2\pi}{n}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ;  $n \in \mathbb{Z}^+$ )

**Bài 6:** Trên đường tròn định hướng gốc A, Xác định các điểm B sao cho số đo  $\widehat{AB}$  là:

a)  $k\pi$     b)  $\pi/2 + k\pi$     c)  $-\pi/6 + k\pi/3$     d)  $5\pi/6 + k2\pi/3$

e)  $-\pi/2 + k2\pi/3$     f)  $3\pi/4 + k\pi/2$     g)  $k2\pi/5$     h)  $\pi + k\pi/3$

## 2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### \*.Nhóm A:

**Bài 1:** Tính các hàm số lượng giác khác nếu biết :

a)  $\cos \alpha = 4/5$  ( $270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$ )

b)  $\sin \alpha = 5/13$  ( $\pi/2 < \alpha < \pi$ )

c)  $\tan \alpha = 3$  ( $\pi < \alpha < 3\pi/2$ )

d)  $\cotg 15^{\circ} = 2 + \sqrt{3}$

**Bài 2:** Tính giá trị các biểu thức :

$$A = \frac{2\sin x + \cotg x}{3\cos x}$$

nếu  $\tan x = -2$  ( $90^{\circ} < x < 180^{\circ}$ )

$$B = \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{4\cos^2 x - 3\sin x \cos x} \quad \text{nếu } \cot g x = -3$$

$$C = \frac{\cot g x + \operatorname{tg} x}{\cot g x - \operatorname{tg} x} \quad \text{nếu } \sin x = 3/5$$

$$D = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x \sin^2 x} \quad \text{nếu } \operatorname{tg} x = 2$$

**Bài 3:** Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x - \cos^2 x$

b)  $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x$

c)  $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot g^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \sin^2 x \cos^2 x$

d)  $\frac{(1 + \cot g^2 x)(1/\cos^2 x - 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$

**Bài 4:** CMR : Các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x :

a)  $A = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

b)  $B = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x$

c)  $C = \frac{1 + \cot g x}{1 - \cot g x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x - 1}$

d)  $D = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$

**\*.Nhóm B**

**Bài 5:** Chứng minh các đẳng thức sau :

a)  $\sin^4 x + 2\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = 2$

b)  $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x - 1}{\cos^4 x + \sin^4 x - 1} = 3/2$

c)  $\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} - \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \cot g^2 x}{1 - \cot g^2 x}$

d)  $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x(1 + \cos x)}$

e)  $\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} - \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = -2\operatorname{tg} x$

$(\frac{\pi}{2} < x < \pi)$

f)  $\frac{2(1 + \operatorname{tg} x \sin x \cos x + 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} - \frac{2(1 + \cot g x \sin x \cos x + 1)}{(1 + \cot g x)^2} = \cos^2 x - \sin^2 x$

g)  $(\operatorname{tg} x - \sin x)^2 + (1 - \cos x)^2 = (1/\cos x - 1)^2$

h)  $(\frac{\cos x - \operatorname{tg} x}{1 + \cos x \cot g x})^2 = \frac{\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cos^2 x \cdot \cot g^2 x}$

i)  $2\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \cos x + \sin x}{1 + \cos x - \sin x}$

**Bài 6:** Cho  $\sin x, \cos x = m$ . Tính :

a)  $\sin x + \cos x$

b)  $\sin^4 x + \cos^4 x$

**Bài 7:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính

a)  $\sin x \cos x$

b)  $\sin x - \cos x$

c)  $\operatorname{tg}^3 x + \cot g^3 x$

d)  $\sin^7 x + \cos^7 x$

**Bài 8:** Chứng minh các biểu thức sau độc lập với x :

A =  $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

B =  $\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x - \cos^4 x + \sin^2 x$

C =  $2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^3 x + \cos^3 x) = 1$

D =  $\sin^3 x + \cos^3 x + 6\sin^4 x \cos^4 x + 4\sin^2 x \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x) + 1$

**\*.Nhóm C :**

**Bài 9:** Cho  $\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \delta = 0 \\ \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \delta = 1 \end{cases}$

Tính A =  $\sin^4 \alpha + \sin^4 \beta + \sin^4 \delta$

**Bài 10:**

a) Cho  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$  (Với  $0 \neq y \in [-1, 1]$ ). CMR :  $2\sin x \cos x = y$