GIẢI TÍCH

Chương I — HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. DẠNG BÀI TẬP TÍNH GIÁ TRỊ

Bài 1 :

1/ Cho $\cos a = \frac{4}{5}$ ($270^\circ < a < 360^\circ$). Tính sina, tga, cotga

2/ Cho $\sin a = \frac{-12}{13}$ ($\pi < a < \frac{3\pi}{2}$) . Tính các hàm số lượng giác của a.

4/ Cho $\text{cotg}\, a = 2 + \sqrt{3}$ ($180^\circ < a < 270^\circ$) . Tính các hàm số lượng giác của a.

Bài 2 :

1/ Tính giá trị các hàm số lượng giác : $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 210^\circ$, $225^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 405^\circ, 960^\circ, 3630^\circ$.

2/ Tính các hàm số lượng giác : $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{16\pi}{3}$, $\frac{29\pi}{6}$

Bài 3 :

1/ Tính giá trị các hàm số lượng giác :

$$15^\circ , 75^\circ , \frac{\pi}{12} , \frac{5\pi}{12} , \frac{13\pi}{12}$$

2/ Cho $\sin a = \frac{2}{3}$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}$). Tính sin2a , cos2a, tg2a , cotg2a.

$\frac{4\sqrt{5}}{9}$ $\frac{1}{9}$

3/ Cho $\sin\alpha = -\frac{4}{3}$ ($\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$). Tính $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$.

4/ Tính các hàm số lượng giác của : $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}$

5/ Cho $tg\frac{a}{2} = t = \frac{7}{8}$. Tính sina , cosa , tga.

Bài 4 :

1/ Cho $tga = \frac{1}{7}$, $tgb = \frac{3}{4}$. Tính tg(a + b) $= 1$

$tg(a-b) = -\frac{17}{31}$

2/ Cho biết : $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1}{2}$. Tính tgx , tgy.

3/ Cho : $3tg^2x - 8tgx - 3 = 0$ và $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính tg2x. $= -\frac{3}{4}$

4/ Cho : $\sin a - \cos a = \frac{3}{5}$ $\left(\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}\right)$. Tính sin2a và cos2a

$\frac{16}{25}$ $\quad -\frac{\sqrt{369}}{25}$

(= m dk: $-1 \leq \sin 2a \leq 1$
cos2a

Bài 5 :

1/ Tính giá trị các biểu thức :

$A = \frac{tg\alpha + cotg\alpha}{tg\alpha - cotg\alpha}$ biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$B = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ biết $cotg\alpha = 2$

$C = \frac{\sin^2 x + 2\sin x.\cos x - 2\cos^2 x}{2\sin^2 x - 3\sin x.\cos x + 4\cos^2 x}$ biết $tgx = 1$

$D = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^6 x$ biết $\sin x.\cos x = \frac{1}{2}$

$(= \frac{3}{4})$

$E = \frac{\sin a + tga}{\cos a - cotga}$ biết $tg\frac{a}{2} = t = 2$

$= -\frac{32}{9}$

Bài 6 : Tính giá trị các biểu thức sau đây (không dùng bảng)

$A = tg120^\circ + 2\sin 870^\circ - 2\cos 1410^\circ$

$B = cotg585^\circ - 2\cos 1410^\circ + 2\sin 1125^\circ$

$C = 16\sin 10^\circ . \sin 50^\circ . \sin 70^\circ$

$D = 4\cos 10^\circ . \cos 50^\circ . \cos 70^\circ$

$E = 16\sin 20^\circ . \sin 40^\circ . \sin 60^\circ . \sin 80^\circ$

$F = tg20^\circ . tg40^\circ . tg60^\circ . tg80^\circ$

$G = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ$

$H = \cos 84^\circ - \cos 48^\circ - \cos 24^\circ + \cos 12^\circ$

$I = tg9^\circ - tg27^\circ - tg63^\circ + tg81^\circ$

$J = \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}$ $= \frac{1}{2}$

$K = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$

$L = \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$

II. DẠNG BÀI TẬP RÚT GỌN BIỂU THỨC

Bài 1 : Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$B = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} . \sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha} + \frac{1}{1-\cos\alpha}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$C = tg10^\circ . tg20^\circ . tg30^\circ \ldots tg70^\circ . tg80^\circ$

$D = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

$$E = \frac{tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . \cos(2\pi - x) . \sin(\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos(-x)}$$

$$B = \frac{\sin(a+b)+\cos(a-b)}{\cos(a+b)+\sin(a-b)}$$

$$C = \sin a \,.\, \sin(b-c) + \sin b \,.\, \sin(c-a) + \sin c \,.\, \sin(a-b) = 0 .$$

$$D = \frac{1+\sin 2x - \cos 2x}{1+\sin 2x + \cos 2x} = tgx$$

$$E = \frac{\cos 3x + \cos 2x + \cos x}{\sin 3x + \sin 2x + \sin x} = cotg2x$$

$$F = \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1+\cos a - 2\sin^2 2a} = 2\sin a$$

$$A_4 = G = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}} = 2\cos\frac{a}{8} \quad (0 < \alpha < \pi) \qquad A_n = 2\cos\frac{a}{2^{n-1}}$$

III DẠNG BÀI TẬP CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1 : Chứng minh đẳng thức :

1) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \,.\, \cos^2 x$

2) $\dfrac{\sin a}{1+\cos a} + \dfrac{1+\cos a}{\sin a} = \dfrac{2}{\sin a}$

3) $\dfrac{1+\cos a}{1-\cos a} - \dfrac{1-\cos a}{1+\cos a} = \dfrac{4\,\mathrm{cotg}\, a}{\sin a}$

4) $1 + 2\sin x \,.\, \cos x = \sin x \,.\, \cos x \,.\, (1 + tgx)(1 + cotgx)$

5) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \,.\, \cos^2 x$

6) $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

7) $\dfrac{\sin a}{1+\cos a} = \dfrac{1-\cos a}{\sin a} = tg\dfrac{a}{2}$

8) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \dfrac{2}{3}$

Bài 2 : Chứng minh đẳng thức

1) $$\text{tga} + \text{tgb} = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$$

2) $$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}.\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

3) $$\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}.\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

4) $$\frac{\text{tga}+\text{tgb}}{\text{tg}(a+b)} - \frac{\text{tga}-\text{tgb}}{\text{tg}(a-b)} = -2\text{tga}.\text{tgb}$$

5) $$4\sin a.\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right) = \sin 3a$$

Bài 3 : Chứng minh rằng :

1) $$\frac{\text{tg}2x.\text{tg}x}{\text{tg}2x - \text{tg}x} = \sin 2x$$

2) $$\frac{\sin^4 x + 2\sin x.\cos x - \cos^4 x}{\text{tg}2x - 1} = \cos 2x$$

3) $$\frac{1+\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = 2\cos x$$

4) $$\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 4\sin x.\cos 2x.\cos 3x$$

5) $$\frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{3 + 4\cos 2x + \cos 4x} = \text{tg}^4 x$$

Bài 4 : Chứng minh :

1) $$\frac{\sqrt{2}\cos x - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \sqrt{2}\sin x} = \text{tg}x$$

2) $$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \cos 79^\circ - \cos 65^\circ = \cos 7^\circ$$

3) $tg30^o + tg40^o + tg50^o + tg60^o = \frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^o$

4) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

5) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

6) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{15}{16}\cos 2x + \frac{1}{16}\cos 6x$

7) $\cos^8 x - \sin^8 x = \frac{7}{8}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 6x$

Bài 5 : Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x :

$A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$ = -1

$B = \sin^4 x(1 + \sin^2 x) + \cos^4 x(1 + \cos^2 x) + 5\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 1$

$C = 2(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$

Bài 6 : Chứng minh các bất đẳng thức sau đây :

1) $\cos^6 x + \sin^6 x \le 1$

2) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \ge 1$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

3) $1 \le \sin x.\sqrt{\sin x} + \cos x.\sqrt{\cos x} \le \sqrt[4]{2}$ với $0 \le x \le \frac{x}{2}$

4) $\left(1 + \frac{1}{\sin a}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos a}\right) > 5$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$

5) $-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$

6) $-\sqrt{2} \le \cos x - \sin x \le \sqrt{2}$

7) $-5 \le 3\cos x + 4\sin x \le 5$

8) $-2 \le \cos x - \sqrt{3}.\sin x \le 2$

9) $-4 \le \cos 2x + 3\sin x \le \frac{17}{8}$

10) $\cos 36^o > tg36^o$ **(không dùng bảng)**

IV. DẠNG BÀI TẬP VỚI A, B, C LÀ 3 GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

Bài 1 : Với A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh rằng :

1/ $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A \,.\, \text{tg}B \,.\, \text{tg}C$

2/ $\text{cotg}A \,.\, \text{cotg}B + \text{cotg}B \,.\, \text{cotg}C + \text{cotg}C \,.\, \text{cotg}A = 1$

3/ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2} \,.\, \cos\frac{B}{2} \,.\, \cos\frac{C}{2}$

4/ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \,.\, \sin\frac{C}{2}$

5/ $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2} \,.\, \text{cotg}\frac{B}{2} \,.\, \text{cotg}\frac{C}{2}$

6/ $\text{tg}\frac{A}{2} \,.\, \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} \,.\, \text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} \,.\, \text{tg}\frac{A}{2} = 1$

7/ $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$

8/ $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -(1 + 4\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C)$

9/ $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C$

10/ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C)$

Bài 2 : Với A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

1/ $\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C \leq \frac{1}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

2/ $\sin\frac{A}{2} \,.\, \sin\frac{B}{2} \,.\, \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

3/ $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

4/ $2 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$

5/ $\frac{3}{5} \leq \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} < 1$

6/ $tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} \geq 1$

7/ $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

8/ $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$ với Δ ABC nhọn

9/ $tg^2A + tg^2B + tg^2C \geq 9$ với Δ ABC nhọn

10/ $\dfrac{tg^5A + tg^5B + tg^5C}{tgA + tgB + tgC} \geq 9$ với Δ ABC nhọn

Bài 3 : Xét tính chất của tam giác ABC, biết :

1/ $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ 2/ $\dfrac{\sin B}{\sin C} = 2\cos A$

3/ $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1/8$ 4/ $\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{8}$

5/ $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$

6/ $\sin^2A + \sin^2B = 1 + \cos^2C$ 7/ $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$

8/ $\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \dfrac{tgB}{tgC}$

7 DẠNG BÀI TẬP TÌM MIỀN XÁC ĐỊNH VÀ VẼ ĐỒ THỊ HSLG

Bài 1 : Tìm miền xác định của hàm số

1/ $y = tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 2/ $y = cotg\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

3/ $y = \dfrac{tg3x}{\cos x}$ 4/ $y = \dfrac{2}{tgx - \sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sin 2x}$

Bài 2 : Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :

1/ $y = \sin x + \cos x$ trên chu kì $[0, 2\pi]$

2/ $y = tgx + cotgx$ với $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

3/ $y = 1 + |\sin x|$ với $x \in [-\pi, \pi]$

4/ $y = x + \sin 2x$ với $0 \le x \le \pi$

VI HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

Cho tam giác ABC có các góc là A, B, C . Các cạnh tương ứng là a, b, c gọi $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích tam giác.

Bài 1 : Chứng minh rằng :

1/ $(a-b)\text{cotg}\dfrac{C}{2} + (b-c)\text{cotg}\dfrac{A}{2} + (c-a)\text{cotg}\dfrac{B}{2} = 0$ vẽ hình

vẽ hình

2/ $\text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{a}{r}$

3/ $\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}.R$ (Đl hs cosin sin)

4/ $S = R.r.(\sin A + \sin B + \sin C)$ (Đl hs sin)

5/ $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c} \le \dfrac{1}{2}$

Bài 2 :

1/ Cho : B = 2C . Chứng minh $b^2 = ac + c^2$

2/ Cho : C = 1/2 (a + b) . Chứng minh $\text{tg}\dfrac{A}{2}\,.\,\text{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3}$

3/ Cho : $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh : $\text{tgB}\,.\,\text{tgC} = 2\sin^2 A$

4/ Gọi ℓ_a là độ dài phân giác trong của góc A. Chứng minh :

$$\ell_a = \frac{2bc\,.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$$

5/ Cho : $B - C = \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh : $b^2 - c^2 = 2aR$

Bài 3 : Xét tính chất Δ ABC.

1/ Cho : $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Chứng minh tam giác ABC vuông cân.

2/ Cho : $a(\cot g\frac{C}{2} - tgA) = b(tgB - \cot g\frac{C}{2})$. Chứng minh Δ ABC cân.

3/ Cho : $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2+c^2}}$. Chứng minh Δ ABC cân.

4/ Cho : $\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{c^2}{ab} = 1 \\ \cos A.\cos B = \frac{1}{4} \end{cases}$. Chứng minh Δ ABC đều.

5/ Cho : $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2).\sin(A + B)$. Chứng minh Δ ABC vuông hoặc cân.

CHƯƠNG II — PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH - HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

① Phương trình lượng giác cơ bản

Bài 1 : Giải phương trình :

1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

3) $tg\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$

4) $\cot g\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

5) $\sin 2x . 4\cos x = 0$

6) $\sin 6x . \sin 2x = \sin 5x . \sin x$