

ÔN TẬP VỀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 2

1*. Cho $\sin a = 0,8$ ($\frac{\pi}{2} < a < \pi$). Tính $\cos a$, $\tan a$, $\cot a$.

2. Cho $5 \cos a + 4 = 0$ ($180^\circ < a < 270^\circ$). Tính $\sin a$, $\tan a$, $\cot a$.

3. Cho $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$. Tính $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\cot 15^\circ$.

4*. Tính $A = \frac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x}$ biết $\sin x = \frac{1}{3}$.

5*. Tính $B = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ biết $\tan x = -2$.

6. Tính $C = \frac{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}{1 + 4 \sin^2 x}$ biết $\cot x = -3$.

7*. Đơn giản các biểu thức:

a. $A = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$

b. $B = \frac{\sin x + \tan x}{\tan x} - \sin x \cdot \cot x$

c. $C = \frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin^2 x} - \cot x \cdot \cos x$

8. Chứng minh:

a*. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

b*. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

c*. $\tan^2 x = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x$

d. $\sin^2 x \tan x + \cos^2 x \cot x + 2 \sin x \cos x = \tan x + \cot x$

9*. Cho $\cos \alpha = \tan \beta$, $\cos \beta = \tan \gamma$, $\cos \gamma = \tan \alpha$. Chứng minh:

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

10. Chứng minh:

$$a^*. \frac{1 - 2\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x$$

$$b. \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2\operatorname{tg}^2 x$$

$$c^*. \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)}$$

$$d. \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left[1 - \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right] = 2 \operatorname{cotg} x$$

11. Chứng minh:

$$a^*. \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$b. \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$c^*. \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} - \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 - \operatorname{cotg}^2 x}$$

12. Chứng minh rằng nếu:

$$\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b} \text{ thì } \frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

13. Chứng minh các biểu thức sau đây độc lập với x:

$$a^*. A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

$$b. B = \cos^4 x(2\cos^2 x - 3) + \sin^4 x(2\sin^2 x - 3) - 1$$

$$c^*. C = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x) = 4$$

$$d. D = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x = 1$$

ÔN TẬP VỀ CUNG LIÊN KẾT

Bài 3

TÍNH GIÁ TRỊ CÁC HSLG CỦA MỘT CUNG BẰNG CÁCH DÙNG CUNG LIÊN KẾT

Loại 1

a. Biết cung đó:

1. Tính HSLG của các cung:

a*. 150°

b. 240°

c. 315°

d*. 3180°

e. -300°

f. -1380°

2. Tính HSLG của các cung:

a*. 11π

b. $\frac{29\pi}{6}$

c. $-\frac{16\pi}{3}$

d*. $\frac{1988\pi}{3}$

e. $-\frac{115\pi}{6}$

f. $-\frac{159\pi}{4}$

b. Biết một HSLG khác:

3*. Cho $\sin x = -0,96$ ($\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$)

a. Tính $\cos x$

b. Tính $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$; $\cos(\pi - x)$; $\text{tg}(\frac{\pi}{2} + x)$; $\text{cotg}(3\pi - x)$

4. Cho $\text{tg}(\pi + x) = 1 - \sqrt{2}$ với $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

a. Tính $\text{tg} x$, $\text{cotg} x$, $\sin x$, $\cos x$

b. Tính $\text{cotg}(\frac{\pi}{2} + x)$, $\text{tg}(\frac{5\pi}{2} - x)$, $\sin(x - 3\pi)$, $\cos(\frac{7\pi}{2} + x)$

Loại 2

TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

5*. a. $A = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

b. $B = \cos 105^\circ \cdot \cos 75^\circ - \sin 105^\circ \sin 75^\circ$

$$c. C = \operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ \cdot \operatorname{tg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}50^\circ \cdot \operatorname{tg}60^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ$$

$$6. a^*. A = \sin 825^\circ \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \sin(-195^\circ) + \operatorname{tg}155^\circ \operatorname{tg}24^\circ$$

$$b. B = \sin 190^\circ - 4 \sin(-530^\circ) + \cos(280^\circ) - \operatorname{tg}(170^\circ) \cos(-10^\circ)$$

$$c. C = \operatorname{cotg}585^\circ - 2 \cos 1440^\circ + 2 \sin 1125^\circ$$

$$7. a^*. A = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos(216^\circ)}{\sin(144^\circ) - \cos(126^\circ)} \cdot \operatorname{tg}36^\circ$$

$$b. B = \frac{(\operatorname{cotg}44^\circ + \operatorname{tg}226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \operatorname{tg}18^\circ \operatorname{tg}72^\circ$$

$$8. a^*. A = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi - \alpha)} - 2 \cos \alpha$$

$$b. B = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi - \alpha) \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(2\pi - \beta) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)} + \operatorname{cotg} \beta (\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{tg} \beta)$$

Loại 3 | ĐƠN GIẢN MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

$$9. a^*. A = \sin(13\pi + a) - \cos\left(a - \frac{9\pi}{2}\right) + \operatorname{cotg}(12\pi - a) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)$$

$$b. B = \cos(15\pi - a) + \sin\left(a - \frac{7\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$$

$$c. C = \sin(7\pi + a) + \cos\left(a - \frac{5\pi}{2}\right) - \operatorname{cotg}(3\pi - a) + \operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - a\right) + 2 \operatorname{tg}\left(a - \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$10. a. A = \sin(\pi + x) + \sin(2\pi + x) + \sin(3\pi + x) + \dots + \sin(100\pi + x)$$

$$b^*. B = \cos(1710^\circ - x) - 2 \sin(x - 2250^\circ) + \cos(x + 900^\circ) + 2 \sin(720^\circ - x) + \cos(540^\circ - x)$$

$$11. a^*. \Lambda = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(36\pi - x) \cdot \sin(x - 5\pi)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) \cos(x - 99\pi)}$$

$$b. B = \frac{1}{\operatorname{tg}368^\circ} + \frac{2\sin2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2\cos638^\circ + \cos98^\circ}$$

Loại 4

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC
ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

435

12. Chứng minh:

$$a^*. \sin825^\circ \cos(-2535^\circ) + \cos75^\circ \sin(-555^\circ) + \operatorname{tg}(695^\circ) \operatorname{tg}(245^\circ) = 0$$

$$b. \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(207\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

13. Cho A, B, C là 3 góc của tam giác. Chứng minh:

$$a^*. \sin(B + C) = \sin A$$

$$b. \cos A + \cos(B + C) = 0$$

$$c^*. \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

$$d. \cos C + \cos(A + B + 2C) = 0$$

$$e^*. \sin A + \cos\left(\frac{3A + B + C}{2}\right) = 0$$

Bài 4

ÔN TẬP VỀ
TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Loại 1

TÌM MIỀN XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

$$1^*. y = \frac{\sin x}{\cos(\pi - x)}$$

$$4. y = \sqrt{\sin x}$$

$$2^*. y = \frac{1}{\sin x} + \operatorname{tg} x$$

$$5. y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$$

$$3^*. y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Loại 2

TÌM CHU KỲ CỦA HÀM SỐ

6. Tìm chu kỳ của các hàm số:

~~a*~~. $y = 3 \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

~~b*~~. $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$

~~c.~~ $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

~~d.~~ $y = 2\cos\frac{3x}{5} - 3\sin\frac{2x}{7}$

7. Tìm chu kỳ, nếu có của các hàm số:

a. $y = \cos(\sin x)$

b. $y = x + \sin x$

Bài 5

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. ÔN TẬP VỀ CÔNG THỨC CỘNG:

Loại 1

TÍNH GIÁ TRỊ CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

1*. Tính giá trị các HSLG của các cung sau:

a. 15°

b. 75°

c. 105°

d. 285°

e. 3045°

d. 285°

2*. Tương tự bài 1 với:

a. $\frac{7\pi}{12}$

b. $\frac{13\pi}{12}$

c. $\frac{19\pi}{12}$

d. $\frac{103\pi}{12}$

e. $\frac{299\pi}{12}$

3*. Tính $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ biết $\sin x = -\frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

4. Cho 2 góc nhọn α và β có $\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$, $\text{tg } \beta = \frac{1}{3}$

a. Tính $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

b. Tính $\alpha + \beta$

5. Cho 2 góc nhọn x và y thỏa:
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tgy} = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

a. Tính $\operatorname{tg}(x+y)$; $\operatorname{tg}x + \operatorname{tgy}$

b. Tính $\operatorname{tg}x$ và tgy

c. Tính x và y

6. Tính $\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ biết $\sin x = -\frac{40}{41}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

7. Tính $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{4})$ theo $\operatorname{tg} \alpha$

Áp dụng: Tính $\operatorname{tg} 15^\circ$

Loại 2 | TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC:

8*. Tính:

a. $A = \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 20^\circ$

b. $B = \frac{\operatorname{tg}25^\circ + \operatorname{tg}20^\circ}{1 - \operatorname{tg}25^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ}$

c. $C = \frac{1 + \operatorname{tg}15^\circ}{1 - \operatorname{tg}15^\circ}$

9. Tính:

a*. $A = \sin 15^\circ - \sqrt{3} \cos 15^\circ$

b. $B = \sin 15^\circ + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 15^\circ$

c. $C = \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x$

10. Tính:

a*. $A = \sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ + \operatorname{tg}110^\circ \cdot \operatorname{tg} 340^\circ$

b. $B = \cos(-53^\circ) \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \sin(113^\circ)$

c*. $C = \frac{\operatorname{tg}225^\circ - \operatorname{cotg}81^\circ \cdot \operatorname{cotg}69^\circ}{\operatorname{cotg}261^\circ + \operatorname{tg}201^\circ}$

$$d. D = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$e^*. E = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \operatorname{tg}x$$

11. Chứng minh các biểu thức sau đây độc lập đối với x:

$$a^*. A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$b. B = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$c. C = \sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Loại 3 | ĐƠN GIẢN MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC:

12* Đơn giản các biểu thức:

$$a. A = \frac{\cos(a+b) + \sin a \sin b}{\cos(a-b) - \sin a \sin b}$$

$$b) B = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)}$$

$$c. C = \frac{\sin(a-b) + 2\cos a \sin b}{2\cos a \cos b - \cos(a-b)}$$

$$d. D = \frac{\sin(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x)}{\sin(45^\circ + x) + \cos(45^\circ - x)}$$

13. Đơn giản các biểu thức:

$$a. A = \frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)} - \operatorname{tg}b$$

$$b. B = \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) + \sin^2 x$$

$$c. C = \cos(a+b)[1 + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b] - \cos(a-b)[1 - \operatorname{tg}a \operatorname{tg}b]$$

Loại 4 | CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Giả sử các biểu thức đều có nghĩa.

14* Chứng minh:

$$a. \cos a + \sin a = \sqrt{2}\sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

b. $\cos a - \sin a = -\sqrt{2}\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

c. $\frac{1 + \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tga}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

d. $\frac{1 - \operatorname{tga}}{1 + \operatorname{tga}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

e. $\operatorname{cotg}(a + b) = \frac{\operatorname{cotg}a \operatorname{cotg}b - 1}{\operatorname{cotg}b + \operatorname{cotg}a}$

f. $\operatorname{cotg}(a - b) = \frac{\operatorname{cotg}a \operatorname{cotg}b + 1}{\operatorname{cotg}b - \operatorname{cotg}a}$

15. Chứng minh:

a. $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$

b. $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$

c. $\sin(a + b) \cdot \cos(a - b) = \sin a \cos a + \sin b \cos b$

d. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2}\sin a$

16. Chứng minh:

a. $\cos a \sin(b - c) + \cos b \sin(c - a) + \cos c \sin(a - b) = 0$

b. $\sin^2(a - b) + \sin^2 b + 2\sin(a - b)\sin b \cos a = \sin^2 a$

c. $\operatorname{tg}(a + b) - \operatorname{tga} - \operatorname{tgb} = \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb} \cdot \operatorname{tg}(a + b)$

d. $\operatorname{tg}2a \operatorname{tg}(30^\circ - a) + \operatorname{tg}2a \operatorname{tg}(60^\circ - a) + \operatorname{tg}(60^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(30^\circ - a) = 1$

17*. Chứng minh:

a. $\frac{\operatorname{tg}(a - b) + \operatorname{tgb}}{\operatorname{tg}(a + b) - \operatorname{tgb}} = \frac{\cos(a + b)}{\cos(a - b)} = \frac{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$

b. $\frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{\operatorname{tg}(a + b)} - \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{\operatorname{tg}(a - b)} = -2\operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}$

c. Nếu $\sin(\alpha + 2\beta) = 2\sin\alpha$ thì $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3\operatorname{tg}\beta$

d. Nếu $a + b = \frac{\pi}{4}$ thì $(1 + \operatorname{tga})(1 + \operatorname{tgb}) = 2$

18. Chứng minh:

$$a. \operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgc} - \operatorname{tgatgbtgc}}{1 - \operatorname{tgatgb} - \operatorname{tgbtgc} - \operatorname{tgctga}}$$

$$b. \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C$$

$$\Leftrightarrow A+B+C = K\pi; A, B, C \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$c. \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ca}$$

$$\text{biết } ab \neq -1, bc \neq -1, ca \neq -1$$

Loại 5. | HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

19. Cho ΔABC , chứng minh:

$$a^*. \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

$$b. \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

$$c^*. \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \left(\frac{B+C}{2} \right)$$

$$d. \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$e^*. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

$$f. \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C$$

$$g. \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

20*. a*. $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C$ (với ΔABC không vuông)

$$b. \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} = \cotg \frac{A}{2} \cdot \cotg \frac{B}{2} \cdot \cotg \frac{C}{2} \quad (18a)$$

$$c. \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

$$d. \cotg A \cotg B + \cotg B \cotg C + \cotg C \cotg A = 1$$

Chú ý: HS phải thuộc kết quả bài 20.

B. CÔNG THỨC NHÂN:

Loại 1 | TÍNH GIÁ TRỊ CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

1. a*. Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$

b*. Cho $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos 2x$ rồi suy ra x .

c. Cho $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$ rồi suy ra x

d. Cho $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$

2. a*. Cho $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hãy tính các HSLG của cung $\frac{\pi}{8}$

b*. Cho $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, hãy tính $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$

c. Tính các HSLG của $\frac{\pi}{5}$

d. Cho $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Tính $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$

c. Cho $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

3. a*. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

b. Cho $\cos x = 0,8$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

c. Cho $\operatorname{tg} x = \frac{24}{7}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Loại 2 | TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

4*. Tính: a. $A = \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$

b. $B = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$

c. $C = \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ$

d. $D = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$

5. Tính:

a. $A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4}$

b*. $B = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ$

c. $C = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$

d. $D = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

6. Tính:

a*. $A = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}$

b. $B = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$

c. $C = \operatorname{tg}^2 36^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 72^\circ$

Handwritten: $\sin 72 = \sin 2 \cdot 36 = 4 \sin 18 \cos^2 36 (1 - 2 \sin^2 18)$

d. $D = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{11} + 4 \sin \frac{2\pi}{11}$

7. Tính theo $\cos 2x$ các biểu thức:

a*. $A = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

b*. $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

c. $C = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$

d. $D = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

e. $E = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 - \operatorname{cotg}^2 x}$

8. Tính theo $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ các biểu thức:

a*. $A = \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x}$

c. $C = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$

b*. $B = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{cotg} x}$

d. $D = \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

Loại 3

ĐƠN GIẢN MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

$$9^* \text{ a. } A = \sin x \cos x \cos 2x$$

$$\text{b. } B = \sin^4 x - \cos^4 x$$

$$\text{c. } C = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

$$\text{d. } D = \frac{\cot g x - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$$

$$10. \text{ a}^* \text{. } A = \sin 6x - 2\sqrt{3}\cos^2 3x + \sqrt{3}$$

$$\text{b. } B = 5\sin^4 2x - 4\sin^2 2x \cos^2 2x - \cos^4 2x + 3\cos 4x$$

$$\text{c. } C = \sin^3 a \cos 3a + \cos^3 a \sin 3a$$

$$11. \text{ a}^* \text{. } A = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} \cdot \frac{\cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

$$\text{b. } B = \frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}$$

$$\text{c. } C = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

Loại 4

CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

$$12. \text{ a}^* \text{. } \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\text{b. } (\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x) \cos 2x = \operatorname{tg} x$$

$$\text{c. } \cot g x - 2\cot g 2x = \operatorname{tg} x$$

$$\text{d}^* \text{. } \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\text{e}^* \text{. } 1 - \sin x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

f.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x)$$

g*.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\text{h. } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

$$13. \text{ a}^* \text{. } 8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cot g 10^\circ$$

$$\text{b}^* \text{. } \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{3\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}$$

$$\text{c}^* \text{. } \cos 3x = 4\cos x \cdot \cos(60^\circ + x) \cdot \cos(60^\circ - x)$$

$$d. \cos^2 2x - \sin^2 x = \cos x \cdot \cos 3x$$

$$e. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\operatorname{tg} 2x$$

$$f. \operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x = 8\operatorname{cotg} 8x$$

$$g. \sin^3 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$14. a^*. \frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$b. \frac{1}{\sin 2x} + \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg} x$$

$$f. \operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$c. \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 - \sin 2x}$$

$$d. \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\operatorname{tg} 2x$$

$$e. \left(1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$$

$$15. a^*. \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$b. \frac{\sin 2x - 2\sin x}{\sin 2x + 2\sin x} = -\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$c^*. \frac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x$$

$$d. \left(\operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{4}{1 - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} 2x}$$

$$e. \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \sin 2x$$

$$f. \text{Cho } \operatorname{tg}(a+b) = 3\operatorname{tga}. \text{ Chứng minh: } \sin(2a+2b) + \sin 2a = 2\sin 2b$$

$$16^*. a. \text{ Chứng minh: } \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \operatorname{cotg} x$$

b. Áp dụng: Đơn giản tổng số:

$$S = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x}$$

c. Áp dụng: Tính $\cotg 15^\circ$.

17. a. Chứng minh: $\tg^2 x = 1 - \frac{2\tg x}{\tg 2x}$

b. Áp dụng: Chứng minh $\tg^2 10^\circ + \tg^2 50^\circ + \tg^2 70^\circ = 9$

C. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI:

Loại 1 | BIẾN ĐỔI THÀNH TỔNG

1*. a. $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$ b. $\cos 5x \cdot \cos 3x$

c. $\sin(x + 30^\circ)\cos(x - 30^\circ)$

2. a*. $2 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$ b*. $8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$

c. $\sin(x + \frac{\pi}{6}) \cdot \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cdot \cos 2x$

d. $4 \cos(a - b) \cdot \cos(b - c) \cdot \cos(c - a)$

Loại 2 | BIẾN ĐỔI THÀNH TÍCH

3*. a. $\cos 4x + \cos 3x$ b. $\cos 3x - \cos 6x$
 c. $\sin 5x + \sin x$ d. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$
 e. $\tg(a + b) + \tga$ f. $\tg 2a - \tga$

4. a*. $\sin a + \cos b$ b. $\sin 2x - \cos x$
 c*. $\sin^2 x - \sin^2 y$ d. $\cos^2 x - \cos^2 y$
 e. $\tg^2 x - \tg^2 y$

5. a*. $3 - 4 \cos^2 x$ c. $3 - 4 \sin^2 x$
 b. $1 - 4 \sin^2 x$

6. a*. $1 \pm \sin x$

b. $1 \pm \cos x$

c. $1 \pm 2\cos x$

d*. $\sqrt{2} \pm 2\cos x$

e. $\sqrt{2}\sin x \pm 1$

f. $\sqrt{3} + 2\sin 2x$

7. a*. $1 + \cos x + \sin x$

b. $1 - \cos x + \sin x$

c. $1 - \sin x - \cos x$

d*. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$

e. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

f*. $\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a$

g. $\sin a + 2\sin 2a + \sin 3a$

h. $\cos a + \cos 4a - \cos 8a - \cos 11a$

8. a*. $\sin(a + b + c) - \sin a - \sin b - \sin c$

b. $\cos(a + b + c) + \cos a + \cos b + \cos c$

c*. $\frac{\sin(a + b)}{\sin a + \sin b}$

~~d. $\frac{\sin a - \sin b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$~~

~~e*. $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$~~

f. $\frac{\sin a + \sin 4a + \sin 7a}{\cos a + \cos 4a + \cos 7a}$

9. $A = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - 1$

Loại 3 | TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

10*. a. $A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ$

b. $B = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$

c. $C = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$

d. $E = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$

11. a*. $A = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

b. $B = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

c. $C = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$

d. $D = \cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{5}) + \cos(x + \frac{4\pi}{5}) + \cos(x + \frac{6\pi}{5}) + \cos(x + \frac{8\pi}{5})$

Loại 4 | ĐƠN GIẢN MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

12*. a. $A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin(\frac{x + \pi}{3}) \sin(\frac{x - \pi}{3})$

b. $B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos(\frac{x + \pi}{3}) \cos(\frac{x - \pi}{3})$

c. $C = \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$

d. $D = \text{tg} 30^\circ + \text{tg} 40^\circ + \text{tg} 50^\circ + \text{tg} 60^\circ$

13. a*. $A = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3$

b. $B = \sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \sin 3x \sin 4x + \sin 4x \sin 5x$

c. $C = 1 + 4 \cos x + 6 \cos 2x + 4 \cos 3x + \cos 4x$

d. $D = \sin 4x - 4 \sin 3x + 6 \sin 2x - 4 \sin x$

14. a*. $A = \frac{\frac{1}{2} + \cos x}{\frac{1}{2} - \cos x}$

b. $B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x}$

c*. $C = \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a - b)}$

d*. $D = \frac{\sin 2x + \sqrt{2} \sin x}{\sin 2x - \sqrt{2} \sin x}$

e. $E = \frac{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$

f. $F = \frac{\sin x - 3 \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 3 \cos 2x + \cos 3x}$

Loại 5 | CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

15. a*. $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$

$$b. \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$c. \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$e. \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

$$d^*. \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$f^*. \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1$$

$$16. a. \cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0$$

$$b. \sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0$$

$$c. \sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) + \sin(c+a)\sin(c-a) = 0$$

$$17. a^*. \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \left(\frac{x+y}{2} \right)$$

$$b. \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{tg} (45^\circ + x)$$

$$d. \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \operatorname{tg} 2x$$

$$c^*. \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$18. a^*. \frac{\sin 7x}{\sin x} = 2\cos 6x + 2\cos 4x + 2\cos 2x + 1$$

$$b. \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1} = 2\cos x$$

$$c^*. 4\cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \cos 3x$$

$$d. 4\sin x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sin 3x$$

Áp dụng: Tính giá trị biểu thức $A = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$

Loại 6

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

19. Cho tam giác ABC, chứng minh:

$$a^*. \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$b. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$c^*. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

$$d. \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Chú ý: HS phải thuộc kết quả bài 19

$$20. a. \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$$

$$b. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$c. \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

21. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu có:

$$a^*. \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

$$b. \sin C = \cos A + \cos B$$

$$c. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

22. Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu có:

$$a^*. \sin A = 2 \sin B \cos C$$

$$b) \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 2 \cotg \frac{C}{2}$$

$$c. \operatorname{tg} A + 2 \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg}^2 B$$

23. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu có:

$$a^*. \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{8}$$

$$b. \sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

$$c. \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$$

24. Chứng minh rằng tam giác ABC cân hay vuông nếu có:

$$a. \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = 1$$

$$b. \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$$

$$c. \frac{\sin(B+C)}{\sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{\sin(B-C)}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

25. Hãy nhận dạng của tam giác ABC nếu có:

$$a. \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

$$b. \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$