

CHƯƠNG II

TỔ HỢP - XÁC SUẤT

A. TỔ HỢP

I. Qui tắc đếm

1. Qui tắc cộng:

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B. Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kỳ cách nào trong phương án A thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

2. Qui tắc nhân:

Một công việc nào đó có thể bao gồm hai công đoạn A và B. Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

II. Hoán vị

1. Giai thừa:

$$n! = 1.2.3 \dots n$$

Qui ước: $0! = 1$

$$n! = (n-1)!n$$

$$\frac{n!}{p!} = (p+1).(p+2) \dots n \quad (\text{với } n > p)$$

$$\frac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1).(n-p+2) \dots n \quad (\text{với } n > p)$$

2. Hoán vị (không lặp):

Một tập hợp gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử là: $P_n = n!$

3. Hoán vị lặp:

Cho k phần tử khác nhau: a_1, a_2, \dots, a_k . Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2, \dots, n_k phần tử a_k ($n_1+n_2+\dots+n_k = n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu (n_1, n_2, \dots, n_k) của k phần tử.

Số các hoán vị lặp cấp n , kiểu (n_1, n_2, \dots, n_k) của k phần tử là:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

4. Hoán vị vòng quanh:

Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dây kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là: $Q_n = (n-1)!$

III. Chính hợp

1. Chính hợp (không lặp):

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một **chính hợp chập k** của n phần tử của tập A.

Số chính hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k = 0$ hoặc $k = n$.
- Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$

2. Chính hợp lặp:

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một **chính hợp lặp chập k** của n phần tử của tập A.

Số chính hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{A_n^k} = n^k$

IV. Tổ hợp

1. Tổ hợp (không lặp):

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Qui ước: $C_n^0 = 1$

Tính chất:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

3. Phân biệt chỉnh hợp và tổ hợp:

• Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức: $A_n^k = k!C_n^k$

• Chỉnh hợp: có thứ tự. Tổ hợp: không có thứ tự.

⇒ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử → chỉnh hợp
Ngược lại, là tổ hợp.

• Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử ($k \leq n$):

+ Không thứ tự, không hoàn lại: C_n^k

+ Có thứ tự, không hoàn lại: A_n^k

+ Có thứ tự, có hoàn lại: $\frac{A_n^k}{A_n^k}$

V. Nhị thức Newton

1. Công thức khai triển nhị thức Newton: Với mọi $n \in N$ và với mọi cặp số a, b ta có:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

2. Tính chất:

- 1) Số các số hạng của khai triển bằng $n+1$
- 2) Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n
- 3) Số hạng tổng quát (thứ $k+1$) có dạng: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)
- 4) Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

5) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

* Nhận xét: Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn:

$$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n \Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

B. XÁC SUẤT

I. Biến cố và xác suất

1. Biến cố

- Không gian mẫu Ω : là tập các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.
- Biến cố A: là tập các kết quả của phép thử làm xảy ra A. $A \subset \Omega$.
- Biến cố không: \emptyset
- Biến cố đối của A: $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- Hợp hai biến cố: $A \cup B$
- Hai biến cố xung khắc: $A \cap B = \emptyset$
- Hai biến cố độc lập: nếu việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến việc xảy ra biến cố kia.
- Biến cố chắc chắn: Ω
- Giao hai biến cố: $A \cap B$ (hoặc $A.B$)

2. Xác suất

- Xác suất của biến cố: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$
- Qui tắc cộng: Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Mở rộng: A, B bất kỳ: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Qui tắc nhân: Nếu A, B độc lập thì $P(A.B) = P(A).P(B)$

II. Biến ngẫu nhiên rời rạc

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc

- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

- $P(X=x_k) = p_k \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

2. Kì vọng (giá trị trung bình)

- $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

3. Phuơng sai và độ lệch chuẩn

- $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu^2$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$